

SERIES GENERATRICES

Partie III. Fonctions arithmétiques et séries de Dirichlet

Printemps 2012

NOMS

Leonard EULER (1707 - 1783)

Bernhard RIEMANN (1826 - 1866)

§1. Fonction zêta de Riemann

1.1. Définition.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 1.$$

1.2. Théorème (Euler).

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Preuve. Utilisez

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right), \quad x \in \mathbb{C}$$

1.3. Théorème (Euler).

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Corollaire. *Il existe un nombre infini de nombres premiers.*

Voici un résultat plus précis:

1.4. Théorème (Euler) *Soit $P = \{p_1, p_2, \dots\}$ l'ensemble de nombres premiers.*

La série

$$\sum_{p \in P} \frac{1}{p}$$

diverge.

Preuve. On va utiliser le fait que

$$H_n := \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \sim \log n,$$

cf. 1.5 ci-dessous.

En général, il est souvent vrai que

$$\sum_{i=1}^n f(i) \sim \int_1^n f(t) dt$$

Il s'en suit qu'il existe C telle que

$$\log H_n \geq \log \log n - C$$

On a

$$H_n \leq \prod_{i=1}^{\pi(n)} (1 - p_i^{-1})^{-1},$$

d'où

$$\log \log n - C \leq \sum_{i=1}^{\pi(n)} \frac{1}{p_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j p_i^j}$$

Or

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j p_i^j} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{p_i^j} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \leq C_2,$$

car

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{p^j} = p^{-2}(1 - p^{-1})^{-1} \leq 2/p^2,$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{\pi(n)} \frac{1}{p_i} \geq \log \log n - C_3$$

□

1.4. Théorème. *Lorsque $s \rightarrow 1+$,*

(a)

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + O(1)$$

(b)

$$\begin{aligned} \log \zeta(s) &= \log \frac{1}{s-1} + O(s-1) \\ \log \zeta(s) &= \sum_{p \in P} \frac{1}{p^s} + O(1) \end{aligned}$$

(c)

$$\zeta'(s) = -\frac{1}{(s-1)^2} + O(1)$$

Preuve. (a)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \int_1^{\infty} x^{-s} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} (n^{-s} - x^{-s}) dx$$

Or

$$\int_1^{\infty} x^{-s} dx = \frac{1}{s-1}$$

4

lorsque $s > 1$. D'un autre côté

$$0 < n^{-s} - x^{-s} = \int_n^x st^{-s-1} dt < s \int_n^{n+1} t^{-2} dt < \frac{s}{n^2}$$

lorsque $n < x < n + 1$. Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} (n^{-s} - x^{-s}) dx < s \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2},$$

ce qui entraîne (a). \square

1.5. Constante d'Euler - Mascheroni.

1.5.1. Lemme.

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = 1 + \int_1^N \frac{[t]}{t^2} dt$$

Preuve.

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{N-1} n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + 1$$

Or

$$n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \int_n^{n+1} \frac{[t]}{t^2} dt$$

\square

Il s'en suit:

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \log N + \gamma + E(N)$$

où

$$\gamma = 1 - \int_1^{\infty} \frac{t - [t]}{t^2} dt$$

et

$$E(N) = \int_N^{\infty} \frac{t - [t]}{t^2} dt$$

On a

$$0 \leq \int_1^{\infty} \frac{t - [t]}{t^2} dt \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} dt = 1,$$

d'où

$$0 \leq \gamma \leq 1$$

D'un autre côté

$$0 \leq E(N) \leq \int_N^{\infty} \frac{1}{t^2} dt = 1/N$$

Il s'en suit

1.6. Théorème.

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \log N + \gamma + O(1/N)$$

où

$$\gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^m \frac{1}{n} - \log m \right) = 0,5772156\dots$$

□

§2. Fonctions arithmétiques**2.1. Fonction d'Euler** $\phi(n)$. Notation: $[1, n] = \{1, \dots, n\}$.

$$X_n = \{m \in [1, n] \mid (m, n) = 1\}$$

Par définition,

$$\phi(n) = \text{Card } X_n$$

Exercice. Calculez $\phi(p^k)$.**2.2. Théorème.** Soit $n = \prod_{i=1}^r p_i^{a_i}$ la décomposition en nombres premiers. Alors

$$\frac{\phi(n)}{n} = \prod_{i=1}^r (1 - p_i^{-1}) = \prod_{p|n} (1 - p^{-1})$$

Preuve. Soit

$$E_i = \{m \in [1, n] \mid p_i \mid m\}, \quad 1 \leq i \leq r.$$

Alors

$$\phi(n) = \text{Card}([1, n] \setminus \cup_i E_i)$$

2.2.1. Formule d'inclusion - exclusion. Soient B_1, \dots, B_r des ensembles finis. Alors

$$\begin{aligned} \text{Card}(\cup_{i=1}^r B_i) &= \sum_{i=1}^r \text{Card } B_i - \sum_{1 \leq i < j \leq r} \text{Card}(B_i \cap B_j) + \\ &\sum_{1 \leq i < j < k \leq r} \text{Card}(B_i \cap B_j \cap B_k) - \dots + (-1)^{r-1} \text{Card}(B_1 \cap \dots \cap B_r) \end{aligned}$$

Exercice. □

Remarquons que

$$\text{Card}(E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_q}) = \frac{n}{p_{i_1} \dots p_{i_q}}$$

Il en découle:

$$\begin{aligned} \phi(n) &= n - \sum_i \frac{n}{p_i} + \sum_{i < j} \frac{n}{p_i p_j} - \dots = \\ &= n \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \end{aligned}$$

□

2.2.2. Corollaire. Si $(m, n) = 1$, $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$.

2.3. Fonction de Möbius $\mu : \mathbb{N}^* \longrightarrow \{0, 1, -1\}$. Par définition $\phi(n) = (-1)^r$ si n est un produit de r facteurs premiers distincts; en particulier $\mu(1) = 1$. S'il existe un premier p tel que $p^2 | n$ alors on pose $\mu(n) = 0$.

2.4. Lemme.

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 0$$

si $n > 1$, et $= 1$ si $n = 1$.

Preuve: exercice.

2.5. Théorème (formule d'inversion de Möbius). (a) *Étant données deux fonctions $f, g : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$, alors*

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \tag{2.5.1}$$

ssi

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)g(n/d). \tag{2.5.2}$$

(b) *Étant données deux fonctions $f, g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = g(x) = 0$ pour $x < 1$, alors*

$$g(x) = \sum_{n \geq 1} f(x/n) \tag{2.5.3}$$

ssi

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \mu(n)g(x/n). \tag{2.5.4}$$

2.6. Théorème. (i)

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n$$

(ii)

$$\phi(n) = \sum_{d|n} d\mu(n/d)$$

Preuve. (i) Pour $d|n$ soit Y_d l'ensemble de $m \in [1, n]$ tels que $(n, m) = d$. Alors

$$[1, n] = \coprod_{d|n} Y_d$$

Par ailleurs

$$Y_d \simeq X_{n/d}, \quad m \mapsto m/d.$$

En effet, les éléments de Y_d sont dm' où $(m', n) = 1$. Donc

$$n = \sum_{d|n} \phi(n/d) = \sum_{d|n} \phi(d)$$

□

(ii) est une conséquence de (i) et de l'inversion de Möbius. □

2.7. Fonctions $\sigma_k(n)$.

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$$

$$d(n) := \sigma_0(n) = \sum_{d|n} 1; \quad \sigma(n) := \sigma_1(n)$$

On remarque que

$$\begin{aligned} \sigma_k(mn) &= \sigma_k(m)\sigma_k(n), \\ \mu(mn) &= \mu(m)\mu(n) \end{aligned}$$

et

$$\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$$

et si $(m, n) = 1$. De telles fonctions sont appelées *multiplicatives*.

2.8. Théorème. Si $n = \prod_{i=1}^r p_i^{a_i}$,

$$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^r \frac{p_i^{k(a_i+1)} - 1}{p_i^k - 1} \tag{2.8.1}$$

et

$$d(n) = \prod_{i=1}^r (a_i + 1) \tag{2.8.2}$$

Preuve. Les diviseurs de n sont

$$\prod_{i=1}^r p_i^{b_i}, \quad 0 \leq b_i \leq a_i,$$

d'où (2.8.2).

Ensuite,

$$\begin{aligned}\sigma_k(n) &= \sum_{b_i \in [0, a_i]} p_1^{kb_1} \dots p_r^{kb_r} = \\ &= \prod_{i=1}^r (1 + p_i^k + \dots + p_i^{ka_i}) = \prod_{i=1}^r \frac{p_i^{k(a_i+1)} - 1}{p_i^k - 1}.\end{aligned}$$

□

2.8. Fonction $\Lambda(n)$.

$$\Lambda(n) = \log p, \text{ si } n = p^m, = 0 \text{ sinon}$$

2.9. Théorème. (a)

$$\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d)$$

(b)

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(n/d) \log d$$

2.10. Convolution. Soit $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}\}$.

Pour $f, g \in \mathcal{F}$ définissons $f * g \in \mathcal{F}$ par

$$f * g(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d)$$

et $f + g$ par $(f + g)(n) = f(n) + g(n)$.

Cela munit \mathcal{F} d'une structure d'un anneau commutatif, associatif avec l'unité $u = \delta_1$: $u(1) = 1, u(n) = 0$ pour $n > 1$.

Exercice. Montrez que l'inverse $v = \mu^{-1}$ dans \mathcal{F} est donnée par $v(n) = 1$, tout n .

Pour $f \in \mathcal{F}$, calculez $\mu * f$ et $v * f$ et en déduisez la formule d'inversion de Möbius.

§3. Séries de Dirichlet

3.1. Étant donnée $f \in \mathcal{F}$ on lui associe une série de Dirichlet

$$D(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

Exercice. Montrez que

$$D(f * g) = D(f)D(g) \quad (3.1.1)$$

3.2. Théorème. (a)

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \quad s > 1$$

(b)

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(n)}{n^s}, \quad s > 2$$

(c)

$$-\frac{d \log \zeta(s)}{ds} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

Preuve. (a) et la conséquence de $v * \mu = u$.

(b) On remarque que

$$\zeta(s-1) = D(w)$$

où $w(n) = n$. Donc (b) est la conséquence de $\phi = w * \mu$, cf. 2.6 (ii). \square

3.3. Théorème.

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s}, \quad s > 1$$

Preuve. $v * v(n) = d(n)$. \square

3.4. Théorème.

$$\zeta(s)\zeta(s-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s}, \quad s > 2$$

Preuve.

$$v * w = \sigma$$

\square

3.4.1. Exercice. Montrez que

$$\zeta(s)\zeta(s-k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)}{n^s}, \quad s > k+1$$

3.5. Théorème. Pour $f(n), g(n)$ comme dans 2.5, posons

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s},$$

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}.$$

Alors (2.5.1) est équivalente à

$$G(s) = \zeta(s)F(s),$$

et (2.5.2) est équivalente à

$$F(s) = \frac{G(s)}{\zeta(s)}.$$

Une fonction f est dite *multiplicative* si $f(1) = 1$ et

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

dès que $(m, n) = 1$.

3.5.1. Théorème. Si f est multiplicative alors

$$D(f) = \prod_{p \text{ premier}} (1 + f(p)p^{-s} + f(p^2)p^{-2s} + \dots)$$

Preuve. Si

$$n = \prod_i p_i^{a_i}$$

est la décomposition en facteurs premiers alors

$$f(n) = \prod_i f(p_i^{a_i})$$

L'égalité (3.5.1.1) s'en suit. \square

3.6. Théorème.

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s}, \quad s > 1.$$

On remarque que

$$q(n) := |\mu(n)| = 1$$

si n est libre de carrés (*quadratfrei*), = 0 sinon.

Preuve.

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \prod_p \frac{1 - p^{-2s}}{1 - p^{-s}} = \prod_p (1 + p^{-s})$$

Or,

$$1 + p^{-s} = 1 + q(p)p^{-s} + q(p^2)p^{-2s} + \dots$$

car $q(p^k) = 0$ pour $k \geq 2$.

La fonction $q(n)$ est multiplicative, et on applique Thm 3.5.1. \square

Exercice. Montrez que

$$\sum_{d|n} q(d) = 2^n$$

3.7. Théorème. (Ramanujan)

$$\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)^2}{n^s}, \quad s > 1.$$

Preuve.

$$\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} = \prod_p \frac{1 - p^{-2s}}{(1 - p^{-s})^4} = \prod_p \frac{1 + p^{-s}}{(1 - p^{-s})^3}$$

3.7.1. Lemme.

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n$$

□

Il s'en suit:

$$\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} = \prod_p \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 p^{-ns} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n^{-s}$$

où

$$a_n = \prod_{i=1}^b (a_i + 1)^2 = d(n)^2$$

pour $n = \prod_{i=1}^b p_i^{a_i}$. □

Plus généralement,

3.7. Théorème. (Ramanujan) Si $s, s-a, s-b, s-a-b > 1$,

$$\frac{\zeta(s)\zeta(s-a)\zeta(s-b)\zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n)\sigma_b(n)}{n^s}$$

§4. Ordre de grandeur des fonctions arithmétiques

Notations:

$f(x) = O(g(x))$ veut dire que $|f(x)| < Ag(x)$

$f(x) = o(g(x))$ veut dire que $f(x)/g(x) \rightarrow 0$

$f(x) \sim g(x)$ veut dire que $f(x)/g(x) \rightarrow 1$,

lorsque $x \rightarrow \infty$.

4.1. Théorème de nombres premiers. Soit

$\pi(x)$ le nombre de nombres premiers $\leq x$.

Alors

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

C'est un théorème difficile.

Exemples. Pour $x = 10, 10^6, 10^9$ on a

$$\pi(x) = 168, 78498, 50847478$$

et

$$[x/\log x] = 145, 72382, 48254942$$

4.2. Théorème.

$$\sum_{i=1}^n d(i) \sim n \log n$$

On remarque que

$$\sum_{i=1}^n \log i \sim \int_1^n \log x dx \sim n \log n$$

Preuve. Considérons le domaine sous l'hyperbole

$$D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, xy \leq n\}$$

et le réseau $L = \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n d(i) &= \text{Card}(D_n \cap L) = \sum_{i=1}^n [n/i] = \\ &= n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} + O(n) = n \log n + O(n) \end{aligned}$$

où on a utilisé Thm. 1.6. \square

Voici une version plus forte de 4.2.

4.3. Théorème.

$$\sum_{i=1}^n d(i) = n \log n + (2\gamma - 1)n + O(\sqrt{n})$$

Ici

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \log n \right)$$

est la constante d'Euler - Mascheroni.

4.4. Théorème.

$$\sum_{i=1}^n \sigma(i) = \frac{\pi^2 n^2}{12} + O(n \log n)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sigma(i) &= \sum_{(i,j) \in D_n \cap L} j = \sum_{i=1}^n \sum_{j \leq i/n} j = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [n/i]([n/i] + 1) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (n/i + O(1))^2 = \\ &= \frac{n^2}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} + O\left(n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}\right) + O(n); \end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} - \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$$

et

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \sim \int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \sim O(1/n)$$

Donc

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} + O(1/n) = \frac{\pi^2}{6} + O(1/n).$$

D'un autre côté

$$\sum_{i=1}^n 1/i = O(\log n),$$

cf. 1.6. L'assertion du théorème 4.4 en suit. \square

4.5. Théorème.

$$\sum_{i=1}^n \phi(i) = \frac{3n^2}{\pi^2} + O(n \log n)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \phi(i) &= \sum_{m=1}^n m \sum_{d|m} \mu(d)/d = \sum_{de \leq n} e \mu(d) = \\ &= \sum_{d=1}^n \mu(d) \sum_{e=1}^{[n/d]} e = \frac{1}{2} \sum_{d=1}^n \mu(d) ([n/d]^2 + [n/d]) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{d=1}^n \mu(d) (n^2/d^2 + O(n/d)) = \frac{n^2}{2} \sum_{d=1}^n \frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(n \sum_{d=1}^n 1/d\right) = \end{aligned}$$

14

Or,

$$\frac{n^2}{2} \sum_{d=1}^n \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{n^2}{2} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(n^2 \sum_{d=n+1}^{\infty} 1/d^2) = \frac{6}{\pi^2} + O(n)$$

et

$$O(n \sum_{d=1}^n 1/d) = O(n \log n),$$

et le théorème en découle. \square

4.6. Théorème.

$$\sum_{i=1}^n |\mu(i)| = \frac{6n}{\pi^2} + O(\sqrt{n})$$

On remarque que $\sum_{i=1}^n |\mu(i)|$ est le nombre de nombres libres de carrés $\leq n$.

Preuve. Soit

$$Q(x) = \sum_{i \leq x} |\mu(i)|$$

Soit S_d l'ensemble de nombres naturels $n \leq y^2$ dont le facteur le plus grand carré est d^2 . Alors

$$\text{Card } S_d = Q(y^2/d^2)$$

et

$$[y^2] = \sum_{d \leq y} Q(y^2/d^2)$$

Il s'en suit

$$\begin{aligned} Q(y^2) &= \sum_{d \leq y} \mu(d)[y^2/d^2] = \\ &= \sum_{d \leq y} \mu(d)(y^2/d^2 + O(1)) = y^2 \sum_{d \leq y} \mu(d)/d^2 + O(y) = \\ &= y^2 \sum_{d=1}^{\infty} \mu(d)/d^2 + O(y^2 \sum_{d > y} d^{-2}) + O(y) \end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{d > y} d^{-2} = O(1/y)$$

(exercice.)

Il s'en suit que

$$Q(y^2) = \frac{y^2}{\zeta(2)} + O(y).$$

\square

§5. Nombres de Bernoulli et formule d'Euler - Maclaurin

5.1. Nombres de Bernoulli sont définis par une série génératrice:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n,$$

Exercice. Montrer que $B_{2n+1} = 0$ pour $n > 0$.

Voici quelques premières valeurs:

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30},$$

$$B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66}, B_{12} = -\frac{691}{2730}$$

5.2. Polynômes de Bernoulli. On définit les polynômes $B_n(t)$ ($n \geq 0$) par la série génératrice:

$$\frac{xe^{tx}}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!} \cdot x^n$$

Exercice. Montrez que: (i)

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k} t^k$$

(ii) $B'_n(t) = nB_{n-1}(t)$

(iii) $B_n(t+1) - B_n(t) = nt^{n-1}$. En déduire que

$$\sum_{i=1}^k i^n = \frac{B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(0)}{n+1} \quad (5.2.1)$$

Considérez les cas $n = 1, 2$ explicitement.

(iv) $\sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} B_m = 0$ pour $n > 1$, ce qui permet de calculer les B_n par récurrence. (Utilisez (iii) avec $t = 0$).

5.3. Théorème (Euler).

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} B_{2n}}{(2n)!} \cdot \pi^{2n},$$

□

5.4. Théorème (Euler - Maclaurin). Pour tout $f \in \mathbb{R}[x]$ et $n \in \mathbb{N}$ on a

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n) =$$

$$= \int_0^n f(t)dt + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{B_{2p}}{(2p)!} (f^{(2p-1)}(n) - f^{(2p-1)}(0))$$

Preuve (éskise, cf. [W], pp. 258 - 259). Cherchons un polynôme $S(x)$ tel que

$$S(x) - S(x-1) = f(x).$$

Si $D = d/dx$ alors

$$S(x-1) = e^{-D}S(x)$$

donc

$$f(x) = (1 - e^{-D})S(x)$$

Il s'en suit

$$S(x) = (1 - e^{-D})^{-1} = (b_0D^{-1} + b_1 + b_2D + \dots)f(x)$$

où les b_n sont définis par la série génératrice

$$\frac{t}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} t^n,$$

i.e. $b_0 = 1, b_1 = 1/2, b_n = B_n, n \geq 2$.

Cela donne

$$S(x) = \int_0^x f(t)dt + \frac{1}{2}f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m}{m!} f^{(m)}(x) + C$$

La condition supplémentaire $S(0) = 0$ donne la valeur de la constante C , et on l'en déduit

$$S(x) = \int_0^x f(t)dt + \frac{1}{2}(f(x) - f(0)) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m}{m!} (f^{(m)}(x) - f^{(m)}(0))$$

□

5.4. Théorème (Euler).

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} B_{2n}}{(2n)!} \cdot \pi^{2n},$$

□

§6. Formule d'Euler - Maclaurin. II.

6.1. Étudions maintenant le cas de fonctions pas forcément polynômiales, cf. [AAR], Appendix D.

Soit $f \in C^1([1, \infty))$. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f(j) + f(j+1)) &= \int_j^{j+1} ((x - j - 1/2)f(x))' dx \\ &= \int_j^{j+1} f(x) dx + \int_j^{j+1} (x - j - 1/2)f'(x) dx \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

En sommant $\sum_{j=1}^n$, il s'en suit:

6.2. Théorème.

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^n f(j) + B_1 \cdot (f(n) - f(1)) &= \\ \sum_{j=2}^{n-1} f(j) + \frac{1}{2}(f(1) + f(n)) &= \int_1^n f(x) dx + \int_1^n B_1(x - [x])f'(x) dx \end{aligned}$$

où

$$B_1(x) = x - 1/2$$

est le premier polynôme de Bernoulli. \square

6.3. Formule de Stirling. Faisons $f(x) = \log x$ dans 6.2:

$$\log n! - (n + 1/2) \log n + n = 1 + \int_1^n \frac{B_1(x - [x])}{x} dx$$

La fonction $B_1(x - [x])$ est périodique de période 1 et

$$\int_j^{j+1} B_1(x - [x]) dx = 0, \quad j \in \mathbb{Z}$$

En faisant l'intégration par parties, on en déduit que la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{B_1(x - [x])}{x} dx$$

existe et est finie. Notons-le $C - 1$. Donc,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\log n! - (n + 1/2) \log n + n) = C$$

On peut montrer que

$$C = \frac{1}{2} \log 2\pi$$

Donc

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}^{-1/2} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

6.4. Plus généralement, si $f \in C^k([1, \infty))$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^n f(j) &= \int_1^n f(x) dx + \sum_{j=1}^k (-1)^j \frac{B_j}{j!} \cdot (f^{(j-1)}(n) - f^{(j-1)}(1)) \\ &\quad + \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_1^n B_k(x - [x]) f^{(k(j-1))}(x) dx \end{aligned}$$

Bibliographie

[AAR] G.Andrews, R.Askey, R.Roy, Special functions.

[HW] G.H.Hardy, E.M.Wright, Introduction to the theory of numbers, Chapitres XVI - XVIII.

[RW] G.-P.Ramis, A.Warusfel, Cours de mathématiques pures et appliquées, Vol. 1, Première Partie, Chapitre 5.

[W] A.Weil, Number theory, An approach through history.