INTRODUCTION AUX FONCTIONS SPÉCIALES

Vadim Schechtman

Notes du cours. Automne 2006

Toulouse

Table de Matières

Leitfaden . . . 3

Prologue. Jardin de fonctions spéciales . . . 4

Chapitre I. Fonctions Gamma et Beta

§1. Fonctions Γ et B . . . 5

§2. Série de Stirling . . . 16

Chapitre II. Fonction hypergéométrique de Gauss

§1. Série hypergéométrique . . . 20

§2. Intégrale de Barnes . . . 26

§3. Équation de Riemann . . . 28

§4. Polynômes d'Euler et fonction hypergéométrique . . . 29

Chapitre III. Fonctions de Whittaker

§1. Fonctions de Kummer $M_{k,m}(z)$ . . . 31

§2. Fonctions de Whittaker $W_{k,m}(z)$ . . . 33

§3. Fonctions d'Hermite . . . 35

Chapitre IV. Fonctions de Bessel

§1. Fonctions $J_s(x)$ . . . 39

§2. L'ordre semi-entier . . . 45

§3. Fonctions de Macdonald . . . 46

Chapitre V. Fonctions de Legendre

§1. Polynômes de Legendre . . . 48

§2. Fonctions de Legendre . . . 50

§3. Fonctions adjointes . . . 52

Chapitre VI. Équations de Maxwell et l'équation d'ondes

§1. Des équations de Maxwell à l'équation d'ondes . . . 53

§2. Une solution de l'équation d'ondes . . . 57

Bibliographie . . . 59

LEITFADEN

Jacob BERNOULLI, 1654 - 1705

Leonhard EULER, 1707 - 1783

Jean Baptiste Joseph FOURIER, 1768 - 1830

Johann Carl Friedrich GAUSS, 1777 - 1855

Friedrich Wilhelm BESSEL, 1784 - 1846

Charles HERMITE, 1822 - 1901

Leopold KRONECKER, 1823 - 1891

Georg Friedrich Bernhard RIEMANN, 1826 - 1866

James Clerk MAXWELL, 1831 - 1879

Hermann HANKEL, 1839 - 1873

Heinrich Martin WEBER, 1842 - 1913

Robert Hjalmar MELLIN, 1854 - 1933

Edmund Taylor WHITTAKER, 1873 - 1956

Peter Joseph William DEBYE
(Petrus Josephus Wilhelmus DEBIJE), 1884 - 1966

George Nevill WATSON, 1886 - 1965

JARDIN DES FONCTIONS SPECIALES

0.1. Toutes les fonctions spéciales qu'on va discuter, peuvent être écrites sous une forme de certains *intégrales définies* (ou *périodes*) ou les intégrales curvilignes (le long d'un contour).

On peut les diviser en deux classes:

la première classe, deux facteurs sous intégrale:

$$\int_{z_1}^{z_2} (t-z_1)^a (t-z_2)^b dt \quad \longrightarrow \quad \text{la fonction } B(a,b) \text{ (beta) d'Euler}$$

Cas dégénéré, ou cas limite:

$$\int (t-z)^a e^{-bt} dt \quad \longrightarrow \quad \text{la fonction } \Gamma(a) \text{ (gamma)}$$

0.2. La deuxième classe, trois facteurs sous intégrale:

$$\int_{z_i}^{z_j} (t-z_1)^a (t-z_2)^b (t-z_3)^c dt \quad \longrightarrow \quad \text{fonction hypergéométrique de Gauss } F(a,b,c;z)$$

Cas particuliers:

polynômes de Jacobi;

fonctions (polynômes) de Legendre

Cas limite:

$$\int (t-z_1)^a (t-z_2)^b e^{ct} dt \quad \longrightarrow \text{fonctions de Whittaker } W_{a,b}(z),$$

ou *fonctions hypergéométriques confluentes.*

Cas particuliers:

polynômes de *Laguerre* et polynômes d'*Hermite.*

Ces fonctions satisfont *à une équation différentielle d'ordre* 2 par rapport à z.

Ils sont liées étroitement aux representations des groupes $GL_2(\mathbb{R})$ et $GL_2(\mathbb{C})$.

CHAPITRE I. FONCTIONS GAMMA ET BETA

§1. Fonctions Γ et B

1.0. *À la place d'une introduction. La méthode d'une fonction génératrice.* Considérons, avec Euler, le problème suivant:

définir une fonction $\Pi(s),\ s \in \mathbb{C}$, telle que $\Pi(n) = n!$ pour n naturel.

Pour le résoudre, on écrit une fonction génératrice

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Pi(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t$$

Par la formule de Cauchy,

$$\frac{1}{\Pi(n)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(0+)} \frac{f(t)}{t^{n+1}} dt = \frac{1}{\Pi(n)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(0+)} t^{-n-1} e^t dt$$

Ici $(0+)$ désigne un circle

$$(0+) = \{\epsilon e^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Donc on peut essayer de définir

$$\frac{1}{\Pi(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(0+)} t^{-s-1} e^t dt,\ s \in \mathbb{C}$$

Il faut faire attention quand même, puisque la fonction t^{-s-1} est multiforme. Ce sujet sera répris plus tard, cf. 1.15 ci-dessous.

1.1. On définit:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt, \tag{1.1.1}$$

$\Re(s) > 0$. Plus précisement, (1.1.1) définit $\Gamma(s)$ comme une fonctioon holomorphe dans le demi-plan $\{\Re(s) > 0$.

Exercice. Montrer que $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ et $\Gamma(n) = (n-1)!$ si $n \in \mathbb{N}$.

Ceci permet de prolonger $\Gamma(s)$ en une fonction meromorphe sur $\mathbb{C}$, avec des poles simples en $s = 0, -1, -2, \ldots$, cf. 1.7 ci-dessous.

En effet, on a:

$$\Gamma(s+n+1) = (s+n)(s+n-1)\ldots s\Gamma(s),$$

ou

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n+1)}{(s+n)(s+n-1)\ldots s}$$

et

$$\Gamma(s+n+1) = 1 + O(s+n),$$

d'où

$$\Gamma(s) = \frac{(-1)^n}{n!(s+n)} + O(1),$$

i.e. $\Gamma(s)$ a en $s = -n$ un pôle simple avec le résidu

$$\mathrm{Res}_{s=-n}\Gamma(s) = \frac{(-1)^n}{n!} \tag{1.1.2}$$

1.2. La fonction *Beta* d'Euler est définie par

$$B(s,t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}dx, \quad \Re(s), \Re(t) > 0$$

1.3. *Théorème.*

$$B(s,t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$$

Démonstration, cf. [Jacobi]. On a

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y}x^{a-1}y^{b-1}dxdy$$

On fait le changement de variables $x + y = r,\ x = rw$, donc $0 \leq r < \infty$, $0 \leq w \leq 1$ et

$$dr = dx + dy,\ dx = wdr + rdw,\ dy = (1-w)dr - rdw,$$

donc $dxdy = rdwdr$ (oriéntations: (x, y) et (w, r)). Il s'en suit:

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^1 w^{a-1}(1-w)^{b-1}dw \int_0^\infty e^{-r}r^{a+b-1}dr = B(a,b)\Gamma(a+b)$$

1.3.1. *Exercice.* Montrer que

$$\int_{t_i \geq 0;\ \sum t_i \leq 1} \prod_{r=1}^n t_r^{\alpha_r - 1}dt_1 \ldots dt_n = \frac{\Gamma(\alpha_1)\ldots\Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + 1)}$$

(Dirichlet). Ici tous $\alpha_i > 0$. Cf. [WW], 12.5.

1.4. *Exercice.* Calculer $\Gamma(1/2)$.

Solution. On a

$$\Gamma(1/2)^2 = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1)} = B(1/2, 1/2)$$

Par définition,

$$B(1/2, 1/2) = \int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}dx =$$

$(x = u^2)$

$$= 2\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = 2\arcsin\ 1 = \pi,$$

d'où

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-x}x^{-1/2}dx = \sqrt{\pi}$$

On remarque que

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{-1/2}dx = 2\int_0^\infty e^{-u^2}du = \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}du,$$

donc

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}$$

(l'intégrale de Poisson).

1.5. *Théorème* (Euler, Gauss).

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} n^s B(n+1,s) = \lim_{n\to\infty} n^s \frac{n!}{s(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^s \frac{(n-1)!}{s(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+n-1)} \tag{1.5.1}$$

Cf. [Gauss], Section 20.

En effet, on remarque que

$$e^{-t} = \lim_{n\to\infty} \big(1-\frac{t}{n}\big)^n,$$

d'où

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \big(1-\frac{t}{n}\big)^n t^{s-1}dt \tag{1.5.2}$$

(pour une preuve, cf. 1.6 ci-dessous). On a:

$$\int_0^n \big(1-\frac{t}{n}\big)^n t^{s-1}dt =$$

$(u = t/n)$

$$= n^s \int_0^1 (1-u)^n u^{s-1}du$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$B(n+1,t) = \int_0^1 (1-v)^n v^{t-1}dv = \frac{n!}{t(t+1)\cdot\ldots\cdot(t+n)}$$

et cela est vrai pour tous $t \neq 0, -1, \ldots - n$ (prouver!), d'où (1.5.1).

1.6. *Exercice.* Preuve de (1.5.2), cf. [WW], 12.2.

(a) Pour tous $0 \leq y < 1$,

$$1 + y \leq e^y \leq (1-y)^{-1}$$

(b) Pour tous $0 \leq \alpha \leq 1$,

$$(1-\alpha)^n \geq 1 - n\alpha$$

(c) Déduire de (a) et (b) que

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq n^{-1} t^2 e^{-t}$$

pour tous $0 \leq t < n$.

[En effet, en faisant $y = t/n$ dans (a), on obtient:

$$1 + t/n \leq e^{t/n} \leq (1 - t/n)^{-1},$$

d'où

$$(1 + t/n)^n \leq e^t \leq (1 - t/n)^{-n},$$

et

$$(1 + t/n)^{-n} \geq e^{-t} \geq (1 - t/n)^n,$$

Il s'en suit:

$$0 \leq e^{-t} - (1 - t/n)^n = e^{-t} \cdot \Big(1 - e^t \cdot (1 - t/n)^n\Big) \leq$$

$$\leq e^{-t} \cdot \Big(1 - (1 - t^2/n^2)^n\Big)$$

D'un autre part, d'après (b) avec $\alpha = t^2/n^2$, on aura

$$1 - (1 - t^2/n^2)^n \leq t^2/n,$$

d'où le résultat.]

(d) En déduire que

$$\left| \int_0^n \left\{ e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right\} \cdot t^{s-1} dt \right| \to 0$$

quand $n \to \infty$.

[En effet, d'après (c),

$$\left| \int_0^n \left\{ e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right\} \cdot t^{s-1} dt \right| \leq n^{-1} \int_0^n \; e^{-t} t^{s+1} dt < \leq n^{-1} \int_0^\infty \; e^{-t} t^{s+1} dt,$$

ce qui $\to 0$, puisque la dernière intégrale converge.]

(e) En déduire (1.5.2).

1.7. *Définition de Weierstrass.*

(a) Prouver que la limite

$$\gamma = \lim_{m\to\infty} \{\sum_{r=1}^{m} r^{-1} - \log m\} \tag{1.7.1}$$

existe. Elle s'appelle *la constante d'Euler - Mascheroni.* On a $\gamma = 0,5772157....$

(b) *Théorème.*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \right\} \tag{1.7.2}$$

Démonstration. Cf. [WW], 12.11. La formule de Euler 1.5 et l'identité $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ impliquent:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \lim_{m\to\infty} \left[m^{-z} \prod_{n=1}^{m} \left(1+\frac{z}{n}\right)\right]$$

D'un autre côté,

$$\lim_{m\to\infty} \left[m^{-z} \prod_{n=1}^{m} \left(1+\frac{z}{n}\right)\right] =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left[e^{(\sum_{n=1}^{m} 1/n - \log m)z} \prod_{n=1}^{m} \left\{ \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \right\} \right] =$$

$$= e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \right\},$$

cqfd.

(c) En déduire:

$$\frac{d\log\Gamma(z)}{dz} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(z+n)} =$$

$$= -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n}\right) \tag{1.7.3}$$

$$\frac{d^2\log\Gamma(z)}{dz^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} \tag{1.7.4}$$

1.8. *Théorème.* On a

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin\ \pi a}$$

Preuve. Par la formule d'Euler

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = B(a, 1-a) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{-a} dx =$$

$(x = u/(u+1))$

$$= \int_0^\infty \frac{u^{a-1}}{u+1} du = I$$

Nous calculons la dernière intégrale par la formule de Cauchy, cf. [WW], 6.24, Example 1. En effet, considérons intégrale

$$I(r,R) = \int_{C(r,R)} \frac{z^{a-1}}{z+1} dz,$$

où $C(r,R)$ est le contour

$$C(r,R) = \{r \leq z \leq R\} \cup \{z = Re^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \cup$$

$$\cup \{R \geq z \geq r\} \cup \{z = re^{i\theta},\ 2\pi \geq \theta \geq 0\} =$$

$$= C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$$

Alors

$$I(R,r) = \int_{C_2} + \int_{C_4} + (1 - e^{2\pi i(a-1)}) \cdot \int_r^R \frac{u^{a-1}}{u+1} du = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-1} \frac{z^{a-1}}{z+1} = 2\pi i \cdot e^{\pi i(a-1)}$$

À la limite

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_2} = \lim_{r\to 0} \int_{C_4} = 0,$$

d'où

$$I = 2\pi i \cdot \frac{e^{\pi i(a-1)}}{1 - e^{2\pi i(a-1)}} = \frac{2\pi i}{e^{-\pi i(a-1)} - e^{\pi i(a-1)}} =$$

$$= \frac{2\pi i}{e^{\pi i a} - e^{-\pi i a}} = \frac{\pi}{\sin \pi a}$$

1.8.1. *Exercice.* Déduire (1.1.2) de (1.8).

1.9. Il découle de 1.7 et 1.8 que

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) \tag{1.9.1}$$

(Euler). En prenant la dérivée logarithmique, on obtient la fameuse *décomposition de* $\cot z$ *en fractions simples*:

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi}\right) \tag{1.9.2}$$

1.10. *L'équation* $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \pi/\sin \pi s$ *avant la limite.* On peut réecrire la formule d'Euler sous une forme

$$\Gamma(s) = \lim_{m\to\infty} \Gamma(m,s) \tag{1.10.1}$$

où

$$\Gamma(m,s) = m^s B(m+1,s) = \frac{m^s}{s\prod_{n=1}^m (1+s/n)} \tag{1.10.2}$$

La fonction $\Gamma(m,s)$ a des poles simples en $s = 0, -1, \ldots, -n$. La formule (10.1.1) est vraie pour tous $s \in \mathbb{C} - \{-1, -2, \ldots\}$.

Il s'en suit:

$$\Gamma(m,s)\Gamma(m,-s) = -\frac{1}{s^2\prod_{n=1}^m (1-s^2/n^2)}$$

D'un autre côté:

$$\sin \pi s = \pi s \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right) = \lim_{m\to\infty} \sin(m, \pi s) \tag{1.10.3}$$

où

$$\sin(m,\pi s) = \pi s \prod_{n=1}^{m}\left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right)$$

On obtient:

$$\Gamma(m,s)\Gamma(m,-s) = -\frac{\pi}{s\sin(m,\pi s)} \tag{1.10.4}$$

En passant à la limite $m \to \infty$,

$$\Gamma(s)\Gamma(-s) = -\frac{\pi}{s\sin(\pi s)} \tag{1.10.5}$$

En multipliant par $-s$ et en utilisant $(-s)\Gamma(-s) = \Gamma(1-s)$, on obtient $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \pi/\sin\pi s$.

Donc nous avons déduit (1.10.5) de la formule limite d'Euler et de (1.10.3).

Exercice. Trouver une preuve de (1.10.3) à partir de la formule des résidus de Cauchy.

1.11. *Exercice.* Quelques cas particuliers de la formule de Chowla - Selberg, cf. [CS]. (a) (Legendre). Montrer que

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{\Gamma(1/4)^2}{4\sqrt{2\pi}}$$

1.12. *La formule de multiplication* (Legendre, Gauss).

Théorème.

$$\prod_{r=0}^{n-1} \Gamma(z + r/n) = (2\pi)^{(n-1)/2} n^{1/2-nz}\Gamma(nz)$$

Démonstration. On pose

$$\phi(z) = \frac{n^{nz}\prod_{r=0}^{n-1}\Gamma(z+r/n)}{n\Gamma(nz)}$$

Alors, par la formule d'Euler,

$$\phi(z) = \frac{n^{nz}\prod_{r=0}^{n-1} \lim_{m\to\infty}\{(m-1)!m^{z+r/n}/\prod_{i=0}^{m-1}(z+r/n+i)\}}{n\lim_{m\to\infty}\{(nm-1)!(nm)^{nz}/\prod_{i=0}^{nm-1}(nz+i)\}} =$$

$$= n^{nz-1}\lim_{m\to\infty}\frac{n^{mn}((m-1)!)^n m^{nz+(n-1)/2}}{(nm-1)!(nm)^{nz}} =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\frac{n^{mn-1}((m-1)!)^n m^{(n-1)/2}}{(nm-1)!}$$

ne depends pas de z. En prenant $z = 1/n$,

$$\phi = \phi(z) = \prod_{r=1}^{n-1}\Gamma(r/n),$$

d'où

$$\phi^2 = \prod_{r=1}^{n-1}\Gamma(r/n)\Gamma(1-r/n) = \frac{\pi^{n-1}}{\prod_{r=1}^{n-1}\sin(r\pi/n)}$$

1.12.1. *Exercice.* Montrer que

$$\prod_{r=1}^{n-1}\sin(r\pi/n) = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Le vérifier directement pour $n = 2, 3, 4$.

Puisque $\phi > 0$ (expliquer!), on en déduit

$$\phi = (2\pi)^{(n-1)/2}n^{-1/2},$$

d'où la formule cherchée.

L'intégrale de Hankel

1.13. Considérons l'intégrale

$$\int_\rho^{0+}(-t)^{s-1}e^{-t}dt$$

Ici $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$. On peut prendre pour $(\rho, 0+)$ un contour

$$D = \{\rho \geq t \geq \delta\} \cup \{t = -\delta e^{i\theta},\ -\pi \leq \theta \leq \pi\} \cup \{\delta \leq t \leq \rho\} = D_- \cup D_\delta \cup D_+$$

Ici $\delta,\ 0 < \delta < \rho$ est un nombre arbitraire, l'intégrale ne depend pas de δ (pourquoi?).

On prend sur D_- la branche de $(-t)^{s-1}$ correspondante à $\arg(-t) = -\pi$, i.e.

$$(-t)^{s-1} = e^{-i\pi(s-1)}t^{s-1} \text{ sur } D_-;$$

de là, par l'extension analytique le long de D_δ, $\arg(-t) = \pi$ sur D_+, i.e.

$$(-t)^{s-1} = e^{i\pi(s-1)} t^{s-1} \text{ sur } D_+$$

Il s'en suit:

$$\int_\rho^{0+} (-t)^{s-1} e^{-t} dt = \int_\rho^\delta e^{-i\pi(s-1)} t^{s-1} e^{-t} dt +$$

$$+ \int_{D_\delta} (-t)^{s-1} e^{-t} dt + \int_\delta^\rho e^{i\pi(s-1)} t^{s-1} e^{-t} dt =$$

$$= -2i \sin(\pi s) \int_\delta^\rho t^{s-1} e^{-t} dt + \int_{D_\delta} (-t)^{s-1} e^{-t} dt$$

Maintentant

$$\int_{D_\delta} (-t)^{s-1} e^{-t} dt = - \int_{-\pi}^{\pi} (\delta e^{i\theta})^{s-1} e^{\delta(\cos\theta + i \sin\theta)} \delta i e^{i\theta} d\theta =$$

$$= -i\delta^s \int_{-\pi}^{\pi} e^{is\theta + \delta(\cos\theta + i\sin\theta)} d\theta \longrightarrow 0 \text{ quand } \delta \longrightarrow 0$$

si $\Re(s) > 0$. De là:

1.14. *Théorème.* (a)

$$\int_\rho^{0+} (-t)^{s-1} e^{-t} dt = -2i \sin(\pi s) \int_0^\rho t^{s-1} e^{-t} dt$$

si $\Re(s) > 0$.

En faisant $\rho \longrightarrow \infty$,

(b)

$$\Gamma(s) = -\frac{1}{2i \sin(\pi s)} \int_\infty^{0+} (-t)^{s-1} e^{-t} dt$$

si $\Re(s) > 0$. On peut prendre le membre droit pour une définition de $\Gamma(s)$ pour s arbitraire.

Exercice. En déduire un

1.15. *Corollaire.*

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_\infty^{0+} (-t)^{-s} e^{-t} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{0+} t^{-s} e^t dt,$$

cf. 1.0.

1.16. *Lacet double de Pochhammer. Exercice.* Montrer que

$$\int_P^{(1+,0+,1-,0-)} t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt = (1 - e^{2\pi i a})(1 - e^{2\pi i b}) B(a,b)$$

En déduire que

$$e^{-\pi i(a+b)} \int_P^{(1+,0+,1-,0-)} t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt = -\frac{4\pi^2}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(a+b)}$$

Cf. [WW], 12.43.

Transformation de Mellin.

1.17. Cf. [T]. Si

$$\mathcal{F}(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx \tag{1.17.1}$$

alors

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{F}(s)x^{-s}ds \tag{1.17.2}$$

et réciproquement.

Ces formules sont des conséquences de la formule d'inversion de Fourier. En effet, si l'on pose $x = e^\xi$ et $s = c + it$, alors (1.17.1) devient

$$\mathcal{F}(c+it) = \int_{-\infty}^\infty f(e^\xi)e^{\xi(c+it)}d\xi$$

est (1.17.2) devient

$$f(e^\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \mathcal{F}(c+it)e^{-\xi(c+it)}dt$$

1.18. *Exemple:* Séries de Dirichlet et séries de Fourier. On a

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$$

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s)x^{-s}ds \quad (c>0)$$

En changeant $x = ny$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$) on obtient:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-ny}n^{s-1}y^{s-1}ndy = n^s\int_0^\infty e^{-ny}y^{s-1}dy$$

d'où

$$\frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty e^{-ny}y^{s-1}dy$$

Soit maintenant

$$\phi(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n^s}$$

Alors on aura:

$$\phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-nx} x^{s-1} dx = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx$$

où

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$$

Réciproquement,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \phi(s)\Gamma(s) x^{-s} ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s)(nx)^{-s} ds = f(x)$$

1.19. *Exemple.* Deux intégrales pour la fonction ζ de Riemann, cf. [Riemann].

(a) On définit

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

En faisant $a_n = 1$ dans 1.22, on obtient:

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx$$

où

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}} - 1 = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1},$$

i.e.

$$\zeta(s) = \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$$

(b) *Fonction ζ et fonction θ.* Montrer que

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \int_0^{\infty} \theta(x) x^{s/2-1} dx$$

où

$$\theta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

§2. Série de Stirling

Nombres de Bernoulli

2.1. Nous en donnerons deux définitions, "Poincaré duales".

Première définition:

$$\frac{z}{2}\cot\frac{z}{2} = 1 - B_1\frac{z^2}{2!} - B_2\frac{z^4}{4!} - B_3\frac{z^6}{6!} - \ldots$$

Donc

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_2 = \frac{1}{30},\ B_3 = \frac{1}{42},\ B_4 = \frac{1}{30},\ B_5 = \frac{5}{66},\ \text{etc.}$$

2.2. *Exercice.* Montrer que

$$\frac{t}{e^t - 1} = \frac{t}{2i}\cot\frac{t}{2i} - \frac{t}{2} = 1 - \frac{t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{B_n t^{2n}}{(2n)!}$$

On peut donc poser $B_{1/2} = 1/2$.

2.3. *Théorème* (Legendre).

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^{2\pi x} - 1}dx = \frac{1}{4}\frac{e^a + 1}{e^a - 1} - \frac{1}{2a}$$

Démonstration. On a:

$$\frac{1}{e^{2\pi x} - 1} = e^{-2\pi x}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi n x} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi n x}$$

$(x > 0)$, d'où

$$I := \int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^{2\pi x} - 1}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty \sin ax\ e^{-2\pi n x}dx$$

Or,

$$\int_0^\infty \sin ax\ e^{-2\pi n x}dx = \frac{1}{2i}\int_0^\infty (e^{iax} - e^{-iax})e^{-2\pi n x}dx$$

où

$$\int_0^\infty e^{iax - 2\pi n x}dx = \frac{1}{ia - 2\pi n}e^{iax - 2\pi n x}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2\pi n - ia} = \frac{2\pi n + ia}{a^2 + 4\pi^2 n^2}$$

Donc

$$\int_0^\infty \sin ax\ e^{-2\pi n x}dx = \frac{a}{a^2 + 4\pi^2 n^2}$$

d'où

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{a^2 + 4\pi^2 n^2}$$

Rappelons que (cf. (1.9.2))

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2 - \pi^2 n^2} = \cot a - \frac{1}{a}$$

De là:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{a^2 + 4\pi^2 n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a/4}{a^2/4 + \pi^2 n^2} = \frac{1}{4i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ia}{-(ia/2)^2 + \pi^2 n^2} =$$

$$= -\frac{1}{4i}\left(\cot(ia/2) - \frac{2}{ia}\right) = -\frac{1}{4i}\cot(ia/2) - \frac{1}{2a}$$

Or,

$$\cot(ia/2) = \frac{\cos(ia/2)}{\sin(ia/2)} = \frac{i(e^{-a/2} + e^{a/2})}{e^{-a/2} - e^{a/2}} = \frac{i(1 + e^a)}{1 - e^a}$$

donc

$$-\frac{1}{4i}\cot(ia/2) = \frac{1}{4}\frac{e^a + 1}{e^a - 1},$$

quod erat demonstrandum.

2.4. De là:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{e^{\pi x} - 1} dx = -\frac{1}{2a} + \frac{i}{2}\cot ia = \frac{1}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} B_n \frac{(2a)^{2n}}{(2n)!}$$

En dérivant $2n$ fois et en posant $a = 0$, on en déduit:

$$B_n = 4n \int_0^{\infty} \frac{t^{2n-1}}{e^{2\pi t} - 1} dt$$

cf. [WW], 7.2. On peut régarder cela comme une *deuxième définition* des nombres de Bernoulli (Jacob Bernoulli, *Ars conjectandi*, 1713, p. 97).

Formules de Gauss et de Binet

2.5. *Théorème.*

$$\gamma = \int_0^{\infty} \left\{\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t}\right\} e^{-t} dt$$

Cf. [WW], 2.3.

2.6. *Théorème* (Gauss).

$$\psi(z) = \frac{d \log \Gamma(z)}{dz} = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1 - e^{-t}}\right) dt$$

Cf. [WW], 2.3.

2.7. *Lemme.* Si $\Re z > 0$,

$$\int_0^\infty (e^{-t} - e^{-zt}) \frac{dt}{t} = \log z$$

Cf. [WW], 6.222, Exemple 6 (un bon exercice).

2.8. *Lemme.*

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{e^{-t}}{t} dt = 1 - \frac{\log 2\pi}{2}$$

Cf. [WW], 12.31.

2.9. *La première formule de Binet. Théorème.*

$$\log \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2} \right) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi + \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{e^{-zt}}{t} dt$$

Soit

$$K = \sup_{t \geq 0} \left| \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{1}{t} \right|$$

Alors si $z = x + iy$, la dernière intégrale

$$\left| \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{e^{-zt}}{t} dt \right| \leq K \int_0^\infty e^{-xt} dt = K/x$$

Il s'en suit:

$$\log \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2} \right) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi + O(1/x)$$

Cf. [WW], 12.31.

2.10. *La deuxième formule de Binet. Théorème.*

$$\log \Gamma(z) = (z - 1/2) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi + 2 \int_0^\infty \frac{\arctan(t/z)}{e^{2\pi t} - 1} dt$$

cf. [WW], 12.32.

La série de Stirling

2.11. On a

$$\arctan(t/z) = \frac{t}{z} - \frac{1}{3} \frac{t^3}{z^3} + \frac{1}{5} \frac{t^5}{z^5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n - 1} \frac{t^{2n-1}}{z^{2n-1}} + \frac{(-1)^n}{z^{n-1}} \int_0^t \frac{u^{2n} du}{u^2 + z^2}$$

Il s'en suit que

$$\phi(z) := 2 \int_0^\infty \frac{\arctan(t/z)}{e^{2\pi t} - 1} dt = \frac{B_1}{1 \cdot 2 \cdot z} - \frac{B_2}{3 \cdot 4 \cdot z^3} + \frac{B_3}{5 \cdot 6 \cdot z^5} - \ldots$$

est *un développement asymptotique* de $\phi(z)$.

2.12. *Développements asymptotiques.* D'après Poincaré, on dit qu'une série $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n/z^n$ est un dévoleppement asymptotique d'une fonction $f(z)$ (dans un secteur $D = \{\alpha < \arg z < \beta\}$) à l'infini, qui s'écrit

$$f(z) \sim a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

si pour chaque N

$$\lim_{z\to\infty,\ z\in D} |z^N(f(z) - \sum_{n=0}^{N} a_n/z^n)| = 0$$

On peut exprimer cela autrement:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n/z^n + o(z^{-N})$$

La série $S(z)$ peut même diverger pour tous z.

2.13. Ceci fournit un développement asymptotique de $\log\Gamma(z)$:

$$\log\Gamma(z) \sim (z - 1/2)\log z - z + \frac{1}{2}\log 2\pi + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}B_r}{2r(2r-1)z^{2r-1}} \quad (z \to \infty),$$

La série à droite ne converge pas dans aucun voisinage de ∞. En effet, si elle convergait pour $|z| > \rho$, il existerais K tel que $B_r < K(2r-1)2r\rho^{2r}$, d'où la série $\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1}B_r t^{2r}/(2r)!$ serais une fonction entière, ce qui n'est pas le cas d'après 2.2, cf. [WW], 12.33.

2.14. Puisque $0 < \phi(x) < B_1/2x$ $(x > 0)$, on a $\phi(x) = \theta/12x$ avec $0 < \theta < 1$, d'où

$$\Gamma(x) = (2\pi)^{1/2}x^{x-1/2}e^{-x}e^{\theta/12x}$$

La série asymptotique de $\Gamma(x)$:

$$\Gamma(x) = (2\pi)^{1/2}x^{x-1/2}e^{-x}\left\{1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x} - \frac{571}{2488320x^4} + O(1/x^5)\right\},$$

$x \to \infty$.

§1. Série hypergéométrique

1.1. On pose

$$F(a,b,c;z)=1+\frac{a\cdot b}{1\cdot c}z+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}z^2+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot c(c+1)(c+2)}z^3+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)b(b+1)\ldots(b+n-1)}{n!\cdot c(c+1)\ldots(c+n-1)}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n \qquad (1.1.1)$$

On peut reécrire cela sous une forme

$$F(a,b,c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\Gamma(n+1)}z^n$$

Convergence: cf. [WW], 2.38. En utilisant le *théorème de D'Alembert*:

une serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge absolument s'il existe $\rho<1$ tel que $|u_{n+1}/u_n|\leq\rho$ pour n assez grand,

on en déduit que la série (1.1.1) converge absolument pout $|z|<1$. En effet,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_{n+1}z^{n+1}}{\alpha_n z^n}=z$$

La série diverge si $|z|>1$.

Par contre, on a le théorème:

étant donnée une série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ avec $\lim_{n\to\infty}\ |u_{n+1}/u_n|=1$, elle converge absolument s'il existe $c>0$ tel que

$$\text{lim.sup.}_{n\to\infty}\ n\{|u_{n+1}/u_n|-1\}=-1-c$$

En effet, considérons la série convergeante

$$\sum v_n=\sum An^{-1-c/2}$$

On a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1-c/2}=1-\frac{1+c/2}{n}+O(1/n^2),$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}-1\right)=-1-\frac{c}{2}$$

Il s'en suit que $n(|u_{n+1}/u_n|-1)\leq n(v_{n+1}/v_n-1)$ pour n assez grand, donc qu'il existe $A>0$ tel que $|u_n|<v_n$ pour tous n, d'où l'assertion.

Maintenant considérons la série (1.1.1) avec $|z| = 1$. Posons $u_n = \alpha_n z^n$. On a

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|1 + \frac{a-1}{n}\right| \cdot \left|1 + \frac{b-1}{n}\right| \cdot \left|1 + \frac{c-1}{n} + O(1/n^2)\right| =$$

$$= \left|1 + \frac{a+b-c-1}{n} + O(1/n^2)\right| =$$

$$= 1 + \frac{\Re(a+b-c) - 1}{n} + O(1/n^2)$$

Il s'en suit que (1.1.1) converge absolument pour $|z| = 1$ et $\Re(a+b-c) < 0$.

1.2. On a

$$F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\alpha_{n+1} z^n$$

Or:

$$(n+1)\alpha_{n+1}(a,b,c) = \frac{a(a+1)\dots(a+n)b(b+1)\dots(b+n)}{n!c(c+1)\dots(c+n)} = \frac{ab}{c}\alpha_n(a+1, b+1, c+1),$$

d'où

$$F'(a,b,c;z) = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1, c+1; z)$$

1.3. *Théorème.* $F(z)$ satisfait à l'équation différentielle

$$z(1-z)\frac{d^2F}{dz^2} + \{c - (a+b+1)z\}\frac{dF}{dz} - abF = 0$$

Démonstration. On a

$$(n+1)\alpha_{n+1} = \frac{(a+n)(b+n)}{c+n}\alpha_n$$

$$zF'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha_n z^n$$

$$zF''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)n\alpha_{n+1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{(a+n)(b+n)}{c+n}\alpha_n z^n$$

$$z^2F''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\alpha_n z^n$$

Posons

$$D = z(1-z)\frac{d^2}{dz^2} + \{c - (a+b+1)z\}\frac{d}{dz} - ab \tag{1.3.1}$$

Il s'en suit que

$$DF(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n$$

où

$$\beta_n = \left[n\frac{(a+n)(b+n)}{c+n} - n(n-1) + c \cdot \frac{(a+n)(b+n)}{c+n} - (a+b+1)n - ab \right] \alpha_n = 0,$$

i.e. $DF(z) = 0$, cqfd.

1.4. *Théorème.* On a

$$c\{c-1-(2c-a-b-1)z\}F(a,b,c;z)+$$

$$+(c-a)(c-b)zF(a,b,c+1;z) - c(c-1)(1-z)F(a,b,c-1;z) = 0$$

Démonstration.

$$c(c-1)F(a,b,c;z) = \sum c(c-1)\alpha_n z^n$$

où

$$c(c-1)\alpha_n = c(c-1)\frac{(a+n-1)(b+n-1)}{n(c+n-1)}\alpha_{n-1}; \qquad (A)$$

$$-c(2c-a-b-1)zF(a,b,c;z) = -\sum c(2c-a-b-1)\alpha_n \, z^{n+1} =$$

$$-\sum c(2c-a-b-1)\alpha_{n-1} \, z^n \qquad (B)$$

Ensuite,

$$(c-a)(c-b)zF(a,b,c+1) = \sum (c-a)(c-b)\alpha_{n-1}(a,b,c+1)z^n =$$

$$= \sum (c-a)(c-b)\frac{c}{c+n-1}\alpha_{n-1}z^n \qquad (C)$$

Enfin,

$$-c(c-1)F(a,b,c;z) = -\sum c(c-1)\alpha_n(a,b,c-1)z^n$$

où

$$-c(c-1)\alpha_n(a,b,c-1) = -c(c-1)\frac{(a+n-1)(b+n-1)}{n(c+n-2)}\alpha_{n-1}(a,b,c-1) =$$

$$= -c\frac{(a+n-1)(b+n-1)}{n}\alpha_{n-1} \qquad (D)$$

et

$$c(c-1)zF(a,b,c-1;z) = \sum c(c-1)\alpha_{n-1}(a,b,c-1)z^n =$$

$$= \sum c(c+n-2)\alpha_{n-1}z^n \qquad (E)$$

En ajoutant:

$$(A)+(D): \; (a+n-1)(b+n-1)\left[\frac{c-1}{n(c+n-1)} - \frac{1}{n}\right] = -\frac{(a+n-1)(b+n-1)}{c+n-1}$$

D'un autre côté, $(B) + (C) + (E)$:

$$[(-2c + a + b + 1)(c + n - 1) + (c - a)(c - b) + (c + n - 2)(c + n - 1)]\frac{1}{c + n - 1} =$$

$$= \frac{(a + n - 1)(b + n - 1)}{c + n - 1}$$

d'où ce qu'on veut.

Valeur en 1

1.5. *Théorème* (Gauss).

$$F(a, b, c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - a)\Gamma(c - b)}$$

Dans la preuve, on va utiliser

1.6. *Théorème d'Abel.* Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est une série dont radius de convergeance est 1 et telle que $\sum a_n$ converge. Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformement sur le segment $0 \leq x \leq 1$, donc

$$\lim_{x \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

1.7. On a pour $0 \leq x < 1$:

$$c\{c - 1 - (2c - a - b - 1)x\}F(a, b, c; x) + (c - a)(c - b)xF(a, b, c + 1; x) =$$

$$= c(c - 1)(1 - x)F(a, b, c - 1; x) = c(c - 1)\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \alpha_{n-1})x^n\}$$

Si $\Re(c - a - b) > 0$ alors $\alpha_n \to 0$, donc $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \alpha_{n-1}) = 0$; d'après le théorème d'Abel,

$$\lim_{x \to 1} c(c - 1)\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \alpha_{n-1})x^n\} = 0$$

Par la même raison, $\lim_{x \to 1}$ du membre de gauche sera

$$c(a + b - c)F(a, b, c; 1) + (c - a)(c - b)F(a, b, c + 1; 1),$$

d'où

$$F(a, b, c; 1) = \frac{(c - a)(c - b)}{c(c - a - b)}F(a, b, c + 1; 1)$$

si $\Re(c - a - b) > 0$.

1.8. En répétant,

$$F(a,b,c;1)=\left\{\prod_{n=0}^{m-1}\frac{(c-a+n)(c-b+n)}{(c+n)(c-a-b+n)}\right\}F(a,b,c+m;1)=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\prod_{n=0}^{m-1}\frac{(c-a+n)(c-b+n)}{(c+n)(c-a-b+n)}\lim_{m\to\infty}F(a,b,c+m;1)$$

si les limites existent. Or,

$$\lim_{m\to\infty}\prod_{n=0}^{m-1}\frac{(c-a+n)(c-b+n)}{(c+n)(c-a-b+n)}=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

si $c\notin\{-1,-2,\dots\}$.

1.9. D'autre part,

$$|F(a,b,c+m;1)-1|\leq\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n(a,b,c+m)|\leq$$

(si $m>|c|$)

$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(|a|,|b|,m-|c|)\leq\frac{|ab|}{m-|c|}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(|a|+1,|b|+1,m+1-|c|)$$

Or la série $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(|a|+1,|b|+1,m+1-|c|)$ converge si $m>|a|+|b|+|c|-1$ et est une fonction positive décroissant de m, d'où

$$\lim_{m\to\infty}F(a,b,c+m;1)=1$$

Il s'en suit que

$$F(a,b,c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

Une répresentation intégrale

1.9. *Théorème.*

$$\int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-uz)^{-a}du=\frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}F(a,b,c;z)$$

Démonstration. Considérons l'intégrale

$$I=\int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-uz)^{-a}du,$$

où $|z| < 1$. On a par la formule binômielle:

$$(1-uz)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)(-a-1)\dots(-a-n+1)}{n!}(-uz)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{n!}(uz)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)\Gamma(n+1)} u^n z^n,$$

d'où

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)\Gamma(n+1)} z^n \cdot \int_0^1 u^{b+n-1}(1-u)^{c-b-1}(1-uz)^{-a}du =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)\Gamma(n+1)} z^n \cdot \frac{\Gamma(b+n)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c+n)} =$$

$$= \frac{\Gamma(c-b)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\Gamma(n+1)} z^n,$$

ce qui implique 1.9.

1.10. En posant $z = 1$ dans 1.9,

$$\frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} F(a,b,c;1) = \int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-a-b-1}du =$$

$$= \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)},$$

i.e.

$$F(a,b,c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

Donc on a redémontré la formule de Gauss 1.5.

1.11. *Exercice.* Représenter $F(a,b,c;z)$ comme une intégrale le long d'un double lacet

$$C(a,b,c) \int_L u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-uz)^{-a}du$$

1.12. *Exercice.* En déduire l'équation différentielle 1.3.

Idée: montrer que

$$D\{u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-uz)^{-a}\} = \frac{d}{dt}(\text{quelque chose})$$

où D est l'opérateur différentiel (1.3.1).

§2. Intégrale de Barnes

2.1. *Formule asymptotique*:

$$\log\Gamma(z+a) = (z+a-\frac{1}{2})\log z - z + \frac{1}{2}\log(2\pi) + o(1)$$

où $o(1) \to 0$ quand $|z| \to \infty$. Il en suit que

$$\Gamma(a+z) = \sqrt{2\pi}e^{-z}z^{z+a-1/2}R(z)$$

si

$$|\arg(z)| \leq \pi - \delta \text{ et } |\arg(z)| \leq \pi - \delta,$$

$\delta > 0$, avec $R(z) \to 1$ quand $|z| \to \infty$.

2.2. Considérons l'intégrale

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{\infty i} \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^s ds,$$

avec $|\arg(-z)| < \pi$.

On a

$$(-s)^{-s} = e^{-s(\log|s|+i\arg(-s))};$$
$$s^{-s} = e^{-s(\log|s|+i\arg(s))}$$

donc sur la droite

$$D = [-\infty i, \infty i] = \{re^{\pi i/2},\ r \geq 0\} \cup \{re^{-\pi i/2},\ r \geq 0\}$$

on a

$$(-s)^{-s} = s^{-s}e^{-\pi|\Im(s)|}$$

Ensuite,

$$(-z)^s = e^{s\log|z|+i\arg(-z)} = O(e^{-\arg(-z)\Im(s)})$$

quand $|s| \to \infty$ sur D. Il en résulte que

$$\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^s = O(|s|^{a+b-c-1}e^{-\arg(-z)\Im(s)-\pi|\Im(s)|})$$

quand $|s| \to \infty$ sur D. Donc $I(z)$ est une fonction analytique de z dans un domaine $|\arg(z)| = |\arg(-z)| \leq \pi - \delta,\ \delta > 0$.

2.3. On a

$$\Gamma(-s)\Gamma(1+s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

Considérons l'intégrale

$$I(N) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(N)} \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)}{\Gamma(c+s)\Gamma(1+s)}\frac{\pi(-z)^s}{\sin(\pi s)}ds$$

où $C(N) = \{s = (N+1/2)e^{i\theta},\ -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2\}$. On a sur $C(N)$:

$$\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)}{\Gamma(c+s)\Gamma(1+s)} = O(N^{a+b-c-1}),\ N \to \infty$$

$$(-z)^s = \exp[(N+1/2)(\cos\theta + i\sin\theta)(\log|z| + i\arg(-z))] =$$
$$= O(\exp\{(N+1/2)(\cos\theta\log|z| - \sin\theta\arg(-z))\})$$

Enfin,

$$\sin(\pi s) = \frac{e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}}{2}$$

Puisque

$$\frac{2}{e^a - e^{-a}} = O(e^{-|a|}),\ a \to \infty,$$

nous avons

$$\frac{\pi}{\sin(\pi s)} = \frac{2\pi}{\exp\{(N+1/2)(\cos\theta + i\sin\theta)i\pi\} - \exp\{-(N+1/2)(\cos\theta + i\sin\theta)i\pi\}} =$$
$$= O(\exp\{-(N+1/2)\pi|\sin\theta|\}),\ N \to \infty$$

Donc,

$$\frac{\pi(-z)^s}{\sin(\pi s)} =$$
$$= O(\exp\{(N+1/2)(\cos\theta\log|z| - \sin\theta\arg(-z) - \pi|\sin\theta|)\}) =$$

si $|\arg(z)| \leq \pi - \delta$,

$$= O(\exp\{(N+1/2)(\cos\theta\log|z| - \delta|\sin\theta|)\}$$

La dernière expression est

$$O(\exp\{(N+1/2)2^{-1/2}\log|z|\}) \text{ si } |\theta| \leq \pi/4$$

et

$$O(\exp\{-(N+1/2)2^{-1/2}\delta\}) \text{ si } |\pi/4 \leq \theta| \leq \pi/2|$$

Donc en tous cas pour $|z| < 1$, i.e. pour $\log|z| < 0$, lintégrale $I(N)$ tends à 0 quand $N \to \infty$.

2.4. On a

$$\mathrm{Res}_{s=n}\frac{\pi(-z)^s}{\sin(\pi s)} = z^n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

d'où par la formule de Cauchy

$$I(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\Gamma(1+n)}z^n = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}F(a,b,c;z)$$

d'où finalement

$$F(a,b,c) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{\infty i}\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^s ds,$$

$|\arg(z)| = |\arg(-z)| < \pi$.

§3. Équation P de Riemann

3.1. Celle-ci est l'équation

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left\{ \frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{z-b} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c} \right\} \frac{du}{dz} +$$

$$+ \left\{ \frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a} + \frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{z-b} + \frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{z-c} \right\} \frac{u}{(z-a)(z-b)(z-c)} = 0,$$

où

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$$

notée

$$P(a, b, c; \alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'; z)$$

3.2. *Exemple.*

$$P(0, \infty, c; \alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'; z):$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left\{ \frac{1-\alpha-\alpha'}{z} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c} \right\} \frac{du}{dz} + \left\{ -\frac{c\alpha\alpha'}{z} + \beta\beta' + \frac{c\gamma\gamma'}{z-c} \right\} \frac{u}{z(z-c)} = 0 \quad (3.2.1)$$

Donc

$$P(0, \infty, c; 1/2+m, -c, c-k; 1/2-m, 0, k; z):$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1-c}{z-c} \cdot \frac{du}{dz} + \left\{ -\frac{c(1/4-m^2)}{z} + \frac{c(c-k)k}{z-c} \right\} \frac{u}{z(z-c)} = 0$$

En faisant $c \to \infty$, on obtient *l'équation de Whittaker*:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{du}{dz} + \left\{ \frac{k}{z} + \frac{1/4-m^2}{z^2} \right\} u = 0$$

3.3. *Exemple.*

$$P(0, \infty, 1; 0, a, 0; 1-c, b, c-a-b; z):$$

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + \{c-(a+b+1)z\}\frac{du}{dz} - abu = 0$$

§4. Polynômes d'Euler et fonction hypergéométrique

4.1. Suivant Euler, [Euler], (c), on définit les polynômes

$$E_n(x) = \frac{1}{2}\{(1 + ix/2n)^{2n} + (1 - ix/2n)^{2n}\} \tag{4.1.1}$$

Donc, $E_n(x)$ est un polynôme de degré $2n$, avec le terme constant 1, ne contenant que des puissances pairs de x. Plus précisement,

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k} \frac{x^{2k}}{(2n)^{2k}} \tag{4.1.2}$$

Par exemple:

$$E_1(x) = 1 - \frac{1}{4}x^2$$

$$E_2(x) = 1 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{256}x^4$$

$$E_3(x) = 1 - \frac{5}{12}x^2 + \frac{5}{432}x^4 - \frac{1}{46656}x^4$$

$$E_4(x) = 1 - \frac{7}{16}x^2 + \frac{35}{2048}x^4 - \frac{7}{65536}x^6 + \frac{1}{16777216}x^8$$

4.2. Rappelons que la fonction hypergéométrique de Gauss soit définie par

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \ldots =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} c_i(\alpha, \beta, \gamma)x^i,$$

où

$$c_i(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+i-1) \cdot \beta(\beta+1)\ldots(\beta+i-1)}{i! \cdot \gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+i-1)},$$

cf. [Gauss]. Il s'en suit:

$$c_i(-n/2, -n/2 + 1/2, 1/2) =$$

$$= \frac{(-n/2)(-n/2+1)\ldots(-n/2+i-1) \cdot (-n/2+1/2)(-n/2+3/2)\ldots(-n/2+i-1/2)}{i! \cdot (1/2)(1/2+1)\ldots(1/2+i-1)} =$$

$$= \frac{(-1)^i 2^{-i} n(n-2)\ldots(n-2i+2) \cdot (-1)^i 2^{-i}(n-1)(n-3)\ldots(n-2i+1)}{i! \cdot 2^{-i} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2i-1)} =$$

$$= \frac{2^{-i} \cdot n(n-1)(n-2)\ldots(n-2i+1)}{2^{-i} \cdot 2 \cdot 4 \ldots 2i \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2i-1)} = \binom{n}{2i}$$

Donc

$$F(-n/2,-n/2+1/2,1/2,x^2)=\sum_{i=0}^{[n/2]}\binom{n}{2i}x^{2i}=\frac{1}{2}\{(1+x)^n+(1-x)^n\} \quad (4.2.1)$$

Il en découle:

$$t^nF(-n/2,-n/2+1/2,1/2,u^2/t^2)=\frac{1}{2}\{(t+u)^n+(t-u)^n\}, \quad (4.2.2)$$

cf. [Gauss], no. 5, formula II.

4.3. La formule (2.2.1) implique:

$$E_n(x)=F(-n,-n+1/2,1/2,-x^2/4n^2) \quad (4.3.1)$$

4.4. Si l'on ecrit

$$E_n(x)=\sum_{k=0}^{n} e_{nk}t^{2k},\ e_{nk}:=(-1)^k\binom{2n}{2k}\frac{1}{(2n)^{2k}}$$

alors

$$e_{nk}=(-1)^k\frac{2n(2n-1)\dots(2n-2k+1)}{(2k)!(2n)^{2k}}=\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{2}{2n}\right)\dots\left(1-\frac{2k-1}{2n}\right),$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} e_{nk}=\frac{(-1)^k}{(2k)!},$$

i.e.

$$\lim_{n\to\infty}E_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}=\cos x,$$

comme il faut. En d'autres termes,

$$\lim_{n\to\infty}F(-n,-n+1/2,1/2,-x^2/4n^2)=\cos x,$$

ou, comme dirait Gauss,

$$F(-k,k+1/2,1/2,-x^2/4k^2)=\cos x,$$

k étant "un nombre infinémant grand" (*denotante k numerum infinite magnum*). En effet, Gauss dit que

$$F(k,k',1/2,-x^2/4kk')=\cos x,$$

denotante k,k' *numeros infinite magnos*, cf. [Gauss], no. 5, formula XII.

CHAPITRE III. FONCTIONS DE WHITTAKER

§1. Fonctions de Kummer $M_{k,m}(z)$

1.1. Considérons l'équation

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{du}{dz} + \left\{\frac{k}{z} + \frac{1/4 - m^2}{z^2}\right\}u = 0 \tag{1.1.1}$$

1.2. On va chercher une solution sous une forme

$$u(z) = z^{m+1/2}\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$$

On aura

$$u'(z) = (m+1/2)z^{m-1/2}\sum a_i z^i + z^{m+1/2}\sum_{i\geq 0} i a_i z^{i-1},$$

où

$$(m+1/2)z^{m-1/2}\sum a_i z^i = (m+1/2)\frac{u(z)}{z}$$

et

$$z^{m+1/2}\sum_{i\geq 0} i a_i z^{i-1} = z^{m-1/2}\sum_{i\geq 0} i a_i z^i = z^{m+1/2}\sum_{i\geq 0}(i+1)a_{i+1}z^i$$

De là,

$$u''(z) = -(m+1/2)\frac{u(z)}{z^2} + \frac{m+1/2}{z}\left[\frac{m+1/2}{z}u(z) + z^{m+1/2}\sum (i+1)a_{i+1}z^i\right] +$$

$$+(m+1/2)z^{m-1/2}\sum (i+1)a_{i+1}z^i + z^{m-1/2}\sum (i+1)i a_{i+1}z^i =$$

$$= \frac{m^2-1/4}{z^2}u(z) + (2m+1)z^{m-1/2}\sum (i+1)a_{i+1}z^i + z^{m-1/2}\sum (i+1)i a_{i+1}z^i =$$

$$= \frac{m^2-1/4}{z^2}u(z) + z^{m-1/2}\sum (i+1)[2m+1+i]a_{i+1}z^i$$

Donc (1.1.1) fournit la relation de récurrence

$$(m+k+i+1/2)a_i + (i+1)(2m+i+1)a_{i+1} = 0,$$

ou

$$a_{i+1} = -\frac{m+k+i+1/2}{(i+1)(2m+i+1)}a_i$$

En posant a_i, on obtient pour a_i la valeur

$$a_i = (-1)^i\frac{(m+k+1/2)(m+k+3/2)\dots(m+k+1/2+i-1)}{i!(2m+1)(2m+2)\dots(2m+i)} =$$

$$= (-1)^i \frac{\Gamma(2m+1)\Gamma(m+k+1/2+i)}{i!\Gamma(m+k+1/2)\Gamma(2m+i+1)}$$

En d'autres termes,

$$u(z) = z^{m+1/2}\left\{1 - \frac{m+k+1/2}{1!(2m+1)}z + \frac{(m+k+1/2)(m+k+3/2)}{2!(2m+1)(2m+2)}z^2 - \dots\right\} =$$

$$= z^{m+1/2}\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{\Gamma(2m+1)\Gamma(m+k+1/2+i)}{i!\Gamma(m+k+1/2)\Gamma(2m+i+1)}z^i$$

1.3. Posons $u(z) = e^{-z}v(z)$. Alors

$$u'(z) = e^{-z}\{-v(z) + v'(z)\}$$

et

$$u''(z) = e^{-z}\{v(z) - 2v'(z) + v''(z)\}$$

Il s'en suit que $v(z)$ satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{d^2v}{dz^2} - \frac{dv}{dz} + \left\{\frac{k}{z} + \frac{1/4 - m^2}{z^2}\right\}v = 0 \tag{1.3.1}$$

Cherchons une solution sous une forme $v(z) = z^{m+1/2}\sum_{i\geq 0} b_i z^i$. Les formules 1.2 impliquent la relation de récurrence

$$(-m - 1/2 - i + k)b_i + (i+1)(2m+i+1)b_{i+1} = 0,$$

i.e.

$$b_{i+1} = \frac{m-k+i+1/2}{(i+1)(2m+i+1)}b_i,$$

d'où, en posant $b_0 = 0$,

$$v(z) = z^{m+1/2}\left\{1 + \frac{m-k+1/2}{1!(2m+1)}z + \frac{(m-k+1/2)(m-k+3/2)}{2!(2m+1)(2m+2)}z^2 + \dots\right\}$$

1.4. *Corollaire.*

$$e^{-z}\left\{1 + \frac{m-k+1/2}{1!(2m+1)}z + \frac{(m-k+1/2)(m-k+3/2)}{2!(2m+1)(2m+2)}z^2 + \dots\right\} =$$

$$= \left\{1 - \frac{m+k+1/2}{1!(2m+1)}z + \frac{(m+k+1/2)(m+k+3/2)}{2!(2m+1)(2m+2)}z^2 - \dots\right\}$$

1.5. En faisant la substitution $u(z) = e^{-z/2}W(z)$, on obtient pour la fonction $W(z)$ l'équation différentielle

$$\frac{d^2W}{dz^2} + \left\{-\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{1/4 - m^2}{z^2}\right\}W = 0 \tag{1.5.1}$$

Il découle de 1.3 que la fonction

$$M_{k,m}(z) = z^{m+1/2}e^{-z/2}\left\{1+\frac{m-k+1/2}{1!(2m+1)}z+\frac{(m-k+1/2)(m-k+3/2)}{2!(2m+1)(2m+2)}z^2+\dots\right\}$$

est une solution de (1.5.1). L'autre solution est $M_{k,-m}(z)$.

1.6. *La première formule de Kummer.*

$$z^{-1/2-m}M_{k,m}(z) = (-z)^{-1/2-m}M_{-k,m}(-z)$$

Cela est équivalent à 1.4.

§2. Fonctions de Whittaker $W_{k,m}(z)$

Forme intégrale

2.1. Considérons une intégrale (une forme limite de l'intégrale hypergéométrique)

$$v(z) = v_{k,m}(z) = \int_{\infty}^{(0+)} (-t)^{-k-1/2+m}(1+t/z)^{k-1/2+m}e^{-t}dt$$

Théorème. $v(z)$ satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \left(\frac{2k}{z}-1\right)\frac{dv}{dz} + \frac{1/4-m^2+k(k-1)}{z^2}v = 0$$

Démonstration. Si l'on pose

$$f_{k,m}(t,z) = (-t)^{-k-1/2+m}(1+t/z)^{k-1/2+m}e^{-t}$$

et

$$D_z = (d/dz)^2 + \left(\frac{2k}{z}-1\right)d/dz + \frac{1/4-m^2+k(k-1)}{z^2}$$

alors

$$D_z f_{k,m}(z,t) = \frac{-k+1/2-m}{z^2}\frac{df_{k-1,m}(t,z)}{dt}$$

Le théorème s'en suit.

2.2. On définit la fonction de Whittaker $W_{k,m}(z)$ par

$$W_{k,m}(z) = -\frac{\Gamma(k+1/2-m)z^k e^{-z/2}}{2\pi i}v_{k,m}(z) \tag{2.2.1}$$

Cette expression est bien définie si $k+1/2-m \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$. Elle satisfait á l'équation différentielle de Whittaker (1.5.1):

$$\frac{d^2W}{dz^2} + \left\{-\frac{1}{4}+\frac{k}{z}+\frac{1/4-m^2}{z^2}\right\}W = 0 \tag{2.2.2}$$

2.3. *Exercice.* Montrer que si $\Re(k-1/2-m) \leq 0$, alors

$$W_{k,m}(z) = \frac{z^k e^{-z/2}}{\Gamma(1/2-k+m)} \int_0^\infty t^{-k-1/2-m}(1+t/z)^{k-1/2+m} e^{-t} dt$$

Ceci définit $W_{k,m}(z)$ pour tous k, m.

2.4. *Exemples.* Montrer que les fonctions ci-dessous fournissent des exemples de fonctions de Whittaker, cf. [WW], 16.2.

(a) Fonction de distribution des erreurs

$$\mathrm{Erfc}(x) := \int_x^\infty e^{-t^2} dt = 2x^{1/2} e^{x^2/2} W_{-1/4,1/4}(x^2)$$

(b) Fonction Γ incomplète

$$\gamma(s,x) := \int_0^x t^{s-1} e^{-t} dt = \Gamma(s) - x^{(s-1)/2} e^{-x/2} W_{(s-1)/2,s/2}(x)$$

(c) Logarithme intégral

$$li(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log t} = -(-\log x)^{-1/2} x^{1/2} W_{-1/2,0}(-\log x)$$

Rapport avec $M_{k,m}$

2.5. *Théorème.*

$$W_{k,m}(z) = \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(1/2-m-k)} M_{k,m}(z) + \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(1/2+m-k)} M_{k,-m}(z)$$

Cf. [WW], 16.41.

Développement asymptotique

2.6. En utlisant la formule binomielle

$$(1+t/z)^\lambda = 1 + \frac{\lambda t}{z} + \frac{\lambda(\lambda-1)t^2}{2z^2} + \ldots + \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!} \cdot \frac{t^n}{z^n} + \ldots,$$

on en déduit un développement asymptotique:

Théorème.

$$W_{k,m}(z) \sim z^k e^{-z/2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \{m^2 - (k-i-1/2)^2\}}{n! z^n} \right\}$$

pour $|z|$ grand.

Cf. [WW], 16.3.

Intégrale de Mellin-Barnes

2.7. *Théorème.*

$$W_{k,m}(z) = \frac{e^{-z/2}z^k}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{\infty i} \frac{\Gamma(s)\Gamma(-s-k-m+1/2)\Gamma(-s-k+m+1/2)}{\Gamma(-k-m+1/2)\Gamma(-k+m+1/2)} z^s ds$$

Cf. [WW], 16.4.

§3. Fonctions d'Hermite

3.1. La fonction

$$w(z) = z^{-1/2}W_{k,-1/4}(z^2/2)$$

satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \left\{2k - \frac{z^2}{4}\right\}w = 0$$

(vérifier!) On définit:

$$D_s(z) = 2^{s/2+1/4}z^{-1/2}W_{s/2+1/4,-1/4}(z^2/2)$$

Cette fonction vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d^2D_s}{dz^2} + \left\{s + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4}\right\}D_s = 0 \tag{3.1.1}$$

On l'appelle *l'équation de Weber.* On a:

$$D_s(z) = 2^{s/2+1/4}z^{-1/2}\left\{\frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2-s/2)}M_{s/2+1/4,-1/4}(z^2/2)+\frac{\Gamma(-1/2)}{\Gamma(-s/2)}M_{s/2+1/4,1/4}(z^2/2)\right\}$$

3.2. *Forme intégrale. Théorème.* On a:

$$D_s(z) = -\frac{\Gamma(s+1)}{2\pi i}e^{-z^2/4}\int_{\infty}^{(0+)} e^{-zt-t^2/2}(-t)^{-s-1}dt$$

Cf. [WW], 16.6. Comme conséquence, $D_s(z)$ est une fonction uniforme de z.

3.3. *Rélations de récurrence. Théorème.* (a)

$$D_{s+1}(z) - zD_s(z) + sD_{s-1}(z) = 0$$

(b)

$$D_s'(z) + \frac{z}{2}D_s(z) - sD_{s-1}(z) = 0$$

Démonstration. (a) Désignons

$$f_s(t,z) = e^{-zt-t^2/2}(-t)^{-s-1}$$

Alors

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} = -zf_s + f_{s-1} + (s+1)f_{s+1},$$

d'où l'assertion (on n'oublie pas le facteur $\Gamma(s+1)$ dans la formule 3.2).

(b) Exercice (utiliser toujours 3.2).

Polynômes d'Hermite.

3.4. Maintenant supposons que $s = n \in \mathbb{N}$. Alors on aura:

$$D_n(z) = -\frac{n!e^{-z^2/4}}{2\pi i}\int_{(0+)} \frac{e^{-zt-t^2/2}}{(-t)^{n+1}}dt =$$

$(t = v - z)$

$$= (-1)^n\frac{n!e^{z^2/4}}{2\pi i}\int_{(z+)} \frac{e^{-v^2/2}}{(v-z)^{n+1}}dv = (-1)^n\frac{e^{z^2/4}}{2\pi i}\frac{d^n}{dz^n}\int_{(z+)} \frac{e^{-v^2/2}}{v-z}dv$$

Or, par la formule de Cauchy,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(z+)} \frac{e^{-v^2/2}}{v-z}dv = \mathrm{Res}_{v=z}\frac{e^{-v^2/2}}{v-z} = e^{-z^2/2},$$

d'où

$$D_n(z) = (-1)^n e^{z^2/4}\frac{d^n}{dz^n}e^{-z^2/2}$$

3.5. On définit

$$h_n(z) = e^{z^2/4}D_n(z) = (-1)^n e^{z^2/2}\frac{d^n}{dz^n}e^{-z^2/2}$$

Il est clair que $h_n(z)$ est un polynôme et

$$D_n(z) = h_n(z)e^{-z^2/4}$$

3.6. *Théorème.* (a)

$$h_{n+1}(z) - zh_n(z) + nh_{n-1}(z) = 0$$

(b)

$$h_n''(z) - zh_n'(z) + nh_n(z) = 0$$

(c)

$$h_n'(z) = nh_{n-1}(z)$$

Exercice.

3.7. *Théorème.*

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_n(z)D_m(z)dz = (2\pi)^{1/2}n!\delta_{n,m}$$

(Les intégrales convergent en vertu de 3.5).

Démonstration. En utilisant (3.1.1),

$$(n-m)D_n(z)D_m(z) = D_n(z)D_m''(z) - D_n''(z)D_m(z) = (D_n(z)D_m'(z) - D_n'(z)D_m(z))',$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_n(z)D_m(z)dz = 0$$

si $n \neq m$. Par contre,

$$(n+1)\int_{-\infty}^{\infty} D_n(z)^2dz =$$

(par 3.3 (b))

$$= \int_{-\infty}^{\infty} D_n(z)(D_{n+1}'(z) + zD_{n+1}(z)/2)dz = \int_{-\infty}^{\infty} -D_n'(z)D_{n+1}(z) + zD_n(z)D_{n+1}(z)/2dz =$$

(par 3.3 (b))

$$= \int_{-\infty}^{\infty} D_{n+1}(z)(zD_n(z) - nD_{n-1}(z))dz =$$

(par 3.3 (a))

$$= \int_{-\infty}^{\infty} D_{n+1}(z)^2dz$$

Par récurrence,

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_n(z)^2dz = n!\int_{-\infty}^{\infty} D_0(z)^2dz =$$

$$= n!\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}dz = n!(2\pi)^{1/2},$$

cqfd.

3.8. *Corollaire.*

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_n(z)h_m(z)e^{-z^2/2}dz = (2\pi)^{1/2}n!\delta_{n,m}$$

3.9. *Exercice. Les polynômes d'Hermite* $H_n(z)$ sont définies par

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2}$$

Les exprimer en termes de $h_n(z)$. Prouver la formule explicite

$$H_n(z) = n! \sum_{i=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^i (2z)^{n-2i}}{i!(n-2i)!}$$

3.10. *Exercice.* Prouver les proprétés suivantes de polynômes d'Hermite:

$$H_{n+1}(z) - 2zH_n(z) + 2nH_{n-1}(z) = 0 \tag{a}$$

$$H_n'(z) = 2nH_{n-1}(z) \tag{b}$$

$$H_n''(z) - 2zH_n'(z) + 2nH_n(z) = 0 \tag{c}$$

3.11. *Exercice. Formule limite.* Montrer que:

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{2^{2n} n!} H_{2n}(z/(2\sqrt{n})) \right\} = \frac{\cos z}{\sqrt{\pi}} \tag{C}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{2^{2n+1} n!} H_{2n+1}(z/(2\sqrt{n})) \right\} = \frac{\sin z}{\sqrt{\pi}} \tag{S}$$

CHAPITRE IV. FONCTIONS DE BESSEL

§1. Fonctions $J_s(x)$

1.1. *L'équation de Bessel*:

$$\frac{d^2J}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dJ}{dx}+\left(1-\frac{s^2}{x^2}\right)J=0 \tag{1.1.1}$$

1.2. Cherchons une solution sous une forme

$$J(x)=x^s\sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i$$

On aura:

$$J'(x)=sx^{s-1}\sum_{i\geq 0}a_ix^i+x^s\sum_{i\geq 1} ia_ix^{i-1}=$$

$$=\frac{s}{x}J(x)+x^s\sum_{i\geq 0}(i+1)a_{i+1}x^i$$

Ensuite,

$$J''(x)=-\frac{s}{x^2}J(x)+\frac{s}{x}\left\{\frac{s}{x}J(x)+x^s\sum_{i\geq 0}(i+1)a_{i+1}x^i\right\}+$$

$$+sx^{s-1}\sum_{i\geq 0}(i+1)a_{i+1}x^i+x^s\sum_{i\geq 0}i(i+1)a_{i+1}x^{i-1}=$$

$$=-\frac{s}{x^2}J(x)+\frac{s^2}{x^2}J(x)+x^{s-1}\sum_{i\geq 0}(i+1)(2s+i)a_{i+1}x^i,$$

d'où

$$J''(x)+\frac{1}{x}J(x)=\frac{s^2}{x^2}J(x)+x^{s-1}\sum_{i\geq 0}(i+1)(2s+i+1)a_{i+1}x^i$$

On a

$$J(x)=x^s\sum_{i\geq 0}a_ix^i=x^{s-1}\sum_{i\geq 0}a_ix^{i+1}=x^{s-1}\sum_{i\geq 1}a_{i-1}x^i,$$

donc

$$J''(x)+\frac{1}{x}J(x)+\left(1-\frac{s^2}{x^2}\right)J(x)=x^{s-1}\sum_{i\geq 1}a_{i-1}x^i+x^{s-1}\sum_{i\geq 0}(i+1)(2s+i+1)a_{i+1}x^i$$

Il s'en suit que (1.1.1) est équivalente à

$$a_{i-1}+(i+1)(2s+i+1)a_{i+1}=0,$$

ou

$$a_i + (i+2)(2s+i+2)a_{i+2} = 0 \ (i \geq 0);$$

$$a_1 = 0$$

Donc $a_{2k+1} = 0$ est

$$a_{2k} + (2k+2)(2s+2k+2)a_{2k+2} = 0 \ (k \geq 0),$$

ou

$$a_{2k+2} = -\frac{a_{2k}}{4(k+1)(s+k+1)}$$

Si l'on pose par exemple $a_0 = 1$, on obtient une solution

$$J(x) = x^s \left\{ 1 - \frac{x^2}{2^2 \cdot 1(s+1)} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 1 \cdot 2(s+1)(s+2)} - \ldots \right\}$$

Par définition,

$$J_s(x) = \frac{J(x)}{2^s \Gamma(s+1)} = \frac{x^s}{2^s \Gamma(s+1)} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2^2 \cdot 1(s+1)} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 1 \cdot 2(s+1)(s+2)} - \ldots \right\} =$$

$$= \frac{x^s}{2^s} \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(s+k+1)} \tag{1.2.1}$$

1.3. *Une série génératrice.* Posons

$$e^{z(t-t^{-1})/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n,$$

donc

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int^{(0+)} u^{-n-1} e^{z(u-u^{-1})/2} du =$$

(où $(0+)$ est un contour $\{re^{i\theta}, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$), $u = 2t/z$:

$$= \frac{1}{2\pi i} \frac{z^n}{2^n} \int^{(0+)} t^{-n-1} e^{t-z^2/4t} dt = \frac{1}{2\pi i} \frac{z^n}{2^n} \int^{(0+)} t^{-n-1} e^t \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{z^{2r}}{r! 4^r t^r} dt =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \left(\frac{z}{2} \right)^{n+2r} \frac{1}{2\pi i} \int^{(0+)} t^{-n-r-1} e^t dt$$

On a biensûr

$$\frac{1}{2\pi i} \int^{(0+)} t^{-n-r-1} e^t dt = \mathrm{res}_{t=0} \ t^{-n-r} e^t = \frac{1}{(n+r)!} \text{ si } n+r \geq 0,$$

et 0 sinon. Donc si $n \geq 0$,

$$J_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!(n+r)!} \left(\frac{z}{2} \right)^{n+2r},$$

ce qui coïncide avec (1.2.1). Par contre, si $n < 0$, $n = -m$,

$$J_n(z) = \sum_{r=m}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!(r-m)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2r-m} =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+m}}{(s+m)!s!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2s+m} = (-1)^m J_m(z) \tag{1.3.1}$$

1.4. *L'intégrale de Bessel.* Pour $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int^{(0+)} u^{-n-1}e^{z(u-u^{-1})/2}du =$$

$(u = e^{i\theta})$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta+iz\sin\theta}d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{in\theta-iz\sin\theta}d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-in\theta+iz\sin\theta}d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - z\sin\theta)d\theta$$

1.5. Nous avons

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{z^n}{2^n}\int^{(0+)} t^{-n-1}e^{t-z^2/4t}dt$$

Considérons l'opérateur différentiel

$$D = \partial_z^2 + \frac{\partial z}{z} + 1 - \frac{n^2}{z^2}$$

On a

$$DJ_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{z^n}{2^n}\int^{(0+)} t^{-n-1}\left\{1 - \frac{n+1}{t} + \frac{z^2}{4t^2}\right\}e^{t-z^2/4t}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\frac{z^n}{2^n}\int^{(0+)} \frac{d}{dt}\left\{t^{-n-1}e^{t-z^2/4t}\right\}dt = 0$$

Donc nous avons prouvé encore une fois que $J_n(z)$ satisfait à l'équation (1.1.1). Le même argument marche pour J_s si l'on remplace (0+) par le contour de Hankel $\int_{-\infty}^{(0+)}$, cf. ci-dessous.

1.6. Soit s un nombre complexe quelconque. D'après le précédent, une fonction

$$J(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^s \int_C t^{-s-1}e^{t-z^2/4t}dt$$

satisfait à (1.1.1), si C est un contour arbitraire entourant 0 une fois dans le sens positif, sur lequel la fonction $t^{-s-1}e^{t-z^2/4t}$ est uniforme.

Prenons pour C un contour

$$\int_{-\infty}^{(0+)} = \int_C, \; C = \{-\infty < z \leq -\epsilon\} \cup \{z = \epsilon e^{i\theta} | \; -\pi \leq \theta \leq \pi\} \cup \{-\epsilon \geq z \geq -\infty\}$$

On définit

$$J_s(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^s \int_{-\infty}^{(0+)} t^{-s-1} e^{t - z^2/4t} dt, \; s \in \mathbb{C}$$

1.7. Rappelons l'intégrale de Hankel:

$$\Gamma(s) = -\frac{1}{2i\sin(\pi s)} \int_{\infty}^{(0+)} (-t)^{s-1} e^{-t} dt$$

où

$$\int_{\infty}^{(0+)} = \int_C,$$

$$C = \{\infty > t > \epsilon\} \cup \{t = \epsilon e^{i\theta} | \; 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \cup \{\epsilon \leq t < \infty\}$$

Il s'en suit:

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{\sin(\pi s)\Gamma(1-s)}{\pi} =$$

$$= -\frac{\sin(\pi s)}{\pi} \frac{1}{2i\sin(\pi(1-s))} \int_{\infty}^{(0+)} (-t)^{-s} e^{-t} dt = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^{(0+)} (-t)^{-s} e^{-t} dt$$

ou bien

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} t^{-s} e^t dt \tag{1.6.1}$$

(*formule de Hankel*).

1.8. On en déduit:

$$J_s(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^s \int_{-\infty}^{(0+)} t^{-s-1} e^t e^{-z^2/4t} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^s \int_{-\infty}^{(0+)} t^{-s-1} e^t \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{z^{2r}}{r! 4^r t^r} dt =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left(\frac{z}{2}\right)^{s+2r} \frac{1}{r!} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} t^{-s-r-1} e^t dt =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(s+r+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{s+2r},$$

on a donc rétrouvé la définition (1.2.1).

Rélations de récurrence

1.9. Nous avons:

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)} \frac{d}{dt}\left\{t^{-s}e^t e^{-z^2/4t}\right\}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)} \left\{t^{-s} + \frac{z^2}{4}t^{-s-2} - st^{-s-1}\right\}e^{-z^2/4t}dt =$$

$$= \left(\frac{z}{2}\right)^{-s+1} J_{s-1}(z) + \left(\frac{z}{2}\right)^{-s+1} J_{s+1}(z) - s\left(\frac{z}{2}\right)^{-s} J_s(z),$$

ou

$$J_{s-1}(z) + J_{s+1}(z) - \frac{2s}{z}J_s(z) = 0$$

D'un autre côté,

$$\frac{d}{dz}\{z^{-s}J_s(z)\} = \frac{1}{2^{s+1}\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)} \frac{d}{dz}\left\{t^{-s-1}e^t e^{-z^2/4t}\right\}dt =$$

$$= -\frac{z}{2^{s+2}\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)} t^{-s-2}e^t e^{-z^2/4t}dt = -z^{-s}J_{s+1}(z),$$

ou bien

$$J_s'(z) - \frac{s}{z}J_s(z) + J_{s+1}(z) = 0$$

1.10. Donc on aura:

$$J_{s-1}(z) + J_{s+1}(z) = \frac{2s}{z}J_s(z) \tag{1.10.1}$$

$$J_s'(z) = \frac{2s}{z}J_s(z) - J_{s+1}(z) \tag{1.10.2}$$

d'où

$$J_s'(z) = \frac{1}{2}\{J_{s-1}(z) - J_{s+1}(z)\} \tag{1.10.3}$$

et

$$J_s'(z) = J_{s-1}(s) - \frac{s}{z}J_s(z) \tag{1.10.4}$$

1.11. En multipliant (1.10.4) par z^s, on obtient:

$$z^s J_{s-1}(z) = \frac{d}{dz}\{z^s J_s(z)\} \tag{1.11.1}$$

et en multipliant (1.10.2) par z^{-s-1}, on obtient:

$$z^{-s-1}J_{s+1}(z) = -\frac{d}{zdz}\{z^{-s}J_s(z)\}, \tag{1.11.2}$$

d'où

$$z^{-s-n}J_{s+n}(z) = (-1)^n\left(\frac{d}{zdz}\right)^n\{z^{-s}J_s(z)\}, \tag{1.11.3}$$

$n \in \mathbb{N}$.

1.12. Il découle de (1.10.1) (ou de (1.3.1)) que

$$J_{-1}(z) = -J_1(z),$$

donc (1.10.3) entraîne

$$J_0'(z) = -J_1(z)$$

1.13. *Rapport avec les fonctions de Kummer.* Si l'on fait $y = z^{-1/2}v$ et $z = x/2i$ dans l'équation de Kummer, on obtient l'équation de Whittaker

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1/4 - s^2}{x^2}\right)v = 0$$

qui est satisfaite par les fonctions $M_{0,\pm s}(x)$. En effet, on a le

Théorème.

$$J_s(x) = \frac{M_{0,s}(2iz)}{2^{2s+1/2}i^{s+1/2}\Gamma(s+1)z^{1/2}}$$

Cette rélation est équivalente à *la deuxième formule de Kummer*, cf. [WW], 16.11, II.

§2. L'ordre demi-entier

2.1. Par 1.8,

$$J_{1/2}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{1/2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(r+3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r}$$

Nous avons

$$\Gamma(r+3/2) = (r+1/2)\Gamma(r+1/2) = (r+1/2)(r-1/2)\Gamma(r-1/2) = \ldots$$

$$= (r+1/2)(r-1/2)\ldots\cdot(1/2)\Gamma(1/2) =$$
$$= 2^{-r-1}(2r+1)(2r-1)\ldots\cdot 1\sqrt{\pi}$$

D'un autre côté,

$$(2r+1)! = (2r+1)(2r-1)\ldots\cdot 1\cdot(2r)(2r-2)\ldots 2 = 2^r r!(2r+1)(2r-1)\ldots\cdot 1,$$

d'où

$$r!\Gamma(r+3/2) = 2^{-r-1}r!(2r+1)(2r-1)\ldots\cdot 1\sqrt{\pi} =$$
$$= 2^{-r-1}2^{-r}(2r+1)!\sqrt{\pi} = 2^{-2r-1}(2r+1)!\sqrt{\pi}$$

Donc

$$J_{1/2}(z) = \left(\frac{z}{2\pi}\right)^{1/2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{2(-1)^r}{(2r+1)!} z^{2r} =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r z^{2r+1}}{(2r+1)!} = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sin z$$

2.2. Donc (1.11.3) entraîne:

$$J_{n+1/2} = z^{n+1/2}(-1)^n \left(\frac{d}{zdz}\right)^n \{z^{-1/2}\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sin z\} =$$

$$= \frac{(-1)^n\sqrt{2}z^{n+1/2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{d}{zdz}\right)^n \left(\frac{\sin z}{z}\right) =$$

$$= \left(\frac{2z}{\pi}\right)^{1/2} (-z)^n \left(\frac{d}{zdz}\right)^n \left(\frac{\sin z}{z}\right)$$

§3. Fonctions de Macdonald $K_s(z)$

Sur ces fonctions importantes (par exemple dans la Théorie de Nombres, dans les questions liées à la *Kroneckersche Grenzformel*), le lecteur pourra consulter [WW], 17.7 et [W], 3.7, 6.15, 6.16, 6.22 et 6.23.

Fonctions $I_s(z)$

3.1. On définit

$$I_n(z) = i^{-n} J_n(iz) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{n+2r}}{r!(n+r)!}$$

si $n \in \mathbb{Z}$; si $s \in \mathbb{C}$, on définit

$$I_s(z) = i^{-s} J_s(iz) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{s+2r}}{r!\Gamma(s+r+1)}$$

Ces fonctions satisfont à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 I_s(z)}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dI_s(z)}{dz} - \left(1 + \frac{s^2}{z^2}\right) I_s(z) = 0$$

(vérifier!)

3.2. *Des rélations de récurrence.*

$$I_{s-1}(z) - I_{s+1}(z) = \frac{2s}{z} I_s(z)$$

$$\frac{d}{dz}\{z^s I_s(z)\} = z^s I_{s-1}(z); \ \frac{d}{dz}\{z^{-s} I_s(z)\} = z^{-s} I_{s+1}(z)$$

3.3. *Une forme intégrale.*

$$I_s(z) = \frac{(z/2)^s}{\Gamma(1/2)\Gamma(s+1/2)} \int_0^{\pi} \cosh(z\cos\phi)\sin^{2s}\phi d\phi,$$

si $\Re(s+1/2) > 0$.

3.4. *Une intégrale de Hankel* (cf. [W], 6.22):

$$I_s(z) = \frac{(z/2)^s}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} t^{-s-1} e^{t+z^2/4t} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} u^{-s-1} e^{z(u+u^{-1})/2} du$$

3.5. *Un développement asymptotique*:

$$I_s(z) \sim \frac{e^z}{(2\pi z)^{1/2}} \left\{ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{\prod_{i=0}^{r-1}(4s^2 - (2i+1)^2)}{r! 2^{3r} z^r} \right\}$$

si $|\arg z| < \pi/2$.

Fonctions $K_s(s)$

3.6. On définit la *fonction de Macdonald*

$$K_s(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} W_{0,s}(2z) = \frac{\pi}{2\sin\pi s}(I_{-s}(z) - I_s(z))$$

3.7. *Des formes intégrales.* (a)

$$K_s(z) = \frac{\Gamma(1/2)(z/2)^s}{\Gamma(s+1/2)} \int_1^\infty e^{-zt}(t^2-1)^{s-1/2} dt =$$

$$= \frac{\Gamma(1/2)(z/2)^s}{\Gamma(s+1/2)} \int_0^\infty e^{-z\cosh\theta} \sinh^{2s}\theta d\theta,$$

si $\Re(s+1/2) > 0$ et $|\arg z| < \pi/2$, cf. [W], 6.15.

(b)

$$K_s(xz) = \frac{\Gamma(s+1/2)(2z)^s}{x^s\Gamma(1/2)} \int_0^\infty \frac{\cos xu}{(u^2+z^2)^{s+1/2}} du$$

si $\Re(s+1/2) \geq 0$, $x > 0$ et $|\arg z| < \pi/2$, cf. [W], 6.16.

(c)

$$K_s(z) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-z\cosh t - st} dt =$$

$(\tau = ze^t/2)$

$$= \frac{1}{2}(z/2)^s \int_0^\infty e^{-\tau - z^2/4\tau} \frac{d\tau}{\tau^{s+1}}$$

si $\Re z^2 > 0$, cf. [W], 6.22.

3.8. *Un développement asymptotique*:

$$K_s(z) \sim \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z} \left\{1 + \frac{4s^2-1^2}{1!8z} + \frac{(4s^2-1^2)(4s^2-3^2)}{2!(8z)^2} + \ldots\right\}$$

si $|\arg z| < 3\pi/2$, cf. [W], 7.23.

§1. Polynômes de Legendre

1.1. Les polynômes de Legendre sont définis par la fonction génératrice

$$(1-2zh+h^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)h^n$$

De là:

$$P_0(z) = 1,\ P_1(z) = z,$$

$$P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2-1),\ P_3(z) = \frac{1}{2}(5z^3-3z),$$

$$P_4(z) = \frac{1}{8}(35z^4-30z^2+3),\ P_5(z) = \frac{1}{8}(63z^5-70z^3+15z)$$

En général:

$$P_n(z) = \sum_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!} z^{n-2r} \tag{1.1.1}$$

Exercice. Le démontrer.

1.2. *Formule de Rodrigues.* La formule (1.1.1) entraine:

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)$$

1.3. *Intégrale de Schläfli.*

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{t:\ |t-z|=\epsilon} \frac{(t^2-1)^n}{2^n(t-z)^{n+1}}dt$$

Exercice. Démonrer cela (utiliser 1.2).

1.4. *L'équation différentielle de Legendre.* Considérons l'opérateur différentiel linéaire

$$D_n = (1-z^2)\frac{d^2}{dz^2} - 2z\frac{d}{dz} + n(n+1)$$

Alors

$$D_n\frac{(t^2-1)^n}{2^n(t-z)^{n+1}} = (n+1)\frac{d}{dt}\frac{(t^2-1)^{n+1}}{2^n(t-z)^{n+1}}$$

Il s'en suit que

$$D_nP_n(z) = (1-z^2)\frac{d^2P_n(z)}{dz^2} - 2z\frac{dP_n(z)}{dz} + n(n+1)P_n(z) = 0$$

Autrement dit,

$$\frac{d}{dz}\left\{(1-z^2)\frac{dP_n(z)}{dz}\right\}+n(n+1)P_n(z)=0$$

Le scheme de Riemann de cette équation:

$$P\left\{\begin{matrix} -1 & \infty & 1 & \\ 0 & n+1 & 0\,; & z \\ 0 & -n & 0 & \end{matrix}\right\}$$

1.5. *Relations d'orthogonalité. Théorème* (Legendre).

$$\int_{-1}^{1} P_n(z)P_m(z)dz=\delta_{n,m}\cdot\frac{2}{2n+1}$$

Introduisons une notation: $\{u\}_r = d^r u/dz^r$. Alors

$$\{(z^2-1)^n\}_r(1)=\{(z^2-1)^n\}_r(-1)=0 \text{ si } r<n$$

L'intégration par parties nous fournit donc:

$$\int_{-1}^{1} \{(z^2-1)^m\}_m\{(z^2-1)^n\}_n dz = -\int_{-1}^{1} \{(z^2-1)^m\}_{m-1}\{(z^2-1)^n\}_{n+1}dz=\dots$$

$$=(-1)^m\int_{-1}^{1} (z^2-1)^m\{(z^2-1)^n\}_{n+m}dz$$

Si $m>n$, on a $\{(z^2-1)^n\}_{n+m}=0$, d'où, par la formule de Rodrigues $\int_{-1}^{1} P_n(z)P_m(z)dz = 0$.

Si par contre $n=m$, on obtient

$$\int_{-1}^{1} \{(z^2-1)^n\}_n\{(z^2-1)^n\}_n dz=(-1)^n\int_{-1}^{1} (z^2-1)^n\{(z^2-1)^n\}_{2n}dz=$$

$$=(2n)!\int_{-1}^{1} (1-z^2)^n dz$$

Exercice. Calculer la dernière intégrale par la formule d'Euler sur la fonction B (faire $z=2t-1$). En déduire que $\int_{-1}^{1} P_n(z)^2dz=2/(2n+1)$.

§2. Fonctions de Legendre

2.1. Soit maintenant s un nombre complexe quelconque. L'équation différentielle de Legendre

$$(1-z^2)u''(z) - 2zu'(z) + s(s+1)u(z) = 0$$

est satisfaite par un intégrale

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(t^2-1)^s}{2^s(t-z)^{s+1}}dt \tag{2.1.1}$$

pourvu que C est un contour fermé tel que la fonction sous intégrale

$$f(t) = \frac{(t^2-1)^s}{2^s(t-z)^{s+1}}$$

est uniforme le long de C.

Soit z un nombre réel positif dont la distance de 1 est inférieur à 2; prenons pour C un cercle qui entoure les points 1 et z et ne contient pas -1:

$$C = \{t = 1 + re^{i\theta},\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

avec $2 > r > |1-z|$. On pose en point $A = 1 + r$: $\arg(t-1) = \arg(t+1) = \arg(t-z) = 0$.

La formule (2.1.1) définit alors une fonction $P_s(z)$; par l'extension analytique elle est bien définie sur le plan coupé $\{z \in \mathbb{C} - (-\infty, 0]\}$.

Pour $s \in \mathbb{N}$ on revient aux polynômes de Legendre.

Notation commode (cf. [WW], 15.2):

$$P_s(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_A^{(1+,z+)} \frac{(t^2-1)^s}{2^s(t-z)^{s+1}}dt \tag{2.1.2}$$

2.2. *Relations de récurrence.* Soit C le contour comme ci-dessus:

$$C = (A; 1+, z+)$$

On a:

$$P_s(z) = \frac{1}{2^{s+1}\pi i}\int_C \frac{(t^2-1)^s}{(t-z)^{s+1}}dt$$

$$P_s'(z) = \frac{s+1}{2^{s+1}\pi i}\int_C \frac{(t^2-1)^s}{(t-z)^{s+2}}dt$$

Par contre,

$$\frac{d}{dt}\frac{(t^2-1)^{s+1}}{(t-z)^{s+1}} = \frac{2(s+1)t(t^2-1)^s}{(t-z)^{s+1}} - \frac{(s+1)(t^2-1)^{s+1}}{(t-z)^{s+2}},$$

d'où:

$$0 = \int_C \frac{2t(t^2-1)^s}{(t-z)^{s+1}}dt - \int_C \frac{(t^2-1)^{s+1}}{(t-z)^{s+2}}dt$$

Maintenant on rémarque que $t = (t-z) + z$, i.e.

$$\frac{t(t^2-1)^s}{(t-z)^{s+1}} = \frac{(t^2-1)^s}{(t-z)^s} + \frac{z(t^2-1)^s}{(t-z)^{s+1}} \tag{2.2.1}$$

(une formule importante!) Il s'en suit:

$$\frac{1}{2^{s+1}\pi i}\int_C \frac{(t^2-1)^s}{(t-z)^s}dt = P_{s+1}(z) - zP_s(z) \tag{2.2.2}$$

En dérivant par z:

$$P'_{s+1}(z) - zP'_s(z) - P_s(z) = sP_s(z)$$

ou

$$P'_{s+1}(z) - zP'_s(z) = (s+1)P_s(z) \tag{I}$$

Ensuite,

$$0 = \int_C \frac{d}{dt}\left\{\frac{t(t^2-1)^s}{(t-z)^s}\right\}dt =$$

$$= \int_C \left\{\frac{(t^2-1)^s}{(t-z)^s} + \frac{2st^2(t^2-1)^{s-1}}{(t-z)^s} - \frac{s(t^2-1)^s}{(t-z)^{s+1}}\right\}dt$$

En écrivant $t^2 = t^2 - 1 + 1$ et $t = t - z + z$,

$$0 = \int_C \left\{(s+1)\frac{(t^2-1)^s}{(t-z)^s} + 2s\frac{(t^2-1)^{s-1}}{(t-z)^s} - sz\frac{(t^2-1)^s}{(t-z)^{s+1}}\right\}dt$$

Enfin, en utilisant (2.2.2), on en déduit:

$$(s+1)P_{s+1}(z) - (2s+1)zP_s(z) + sP_{s-1}(z) = 0 \tag{II}$$

2.2.1. *Exercice.* Prouver les récurrences (III) - (V) ci-dessous:

$$zP'_s(z) - P'_{s-1}(z) = sP_s(z) \tag{III}$$

$$P'_{s+1}(z) - P'_{s-1}(z) = (2s+1)P_s(z) \tag{IV}$$

$$(z^2-1)P'_s(z) = szP_s(z) - sP_{s-1}(z) \tag{V}$$

§3. Fonctions adjointes

3.1. Les fonctions adjointes de Legendre sont définis par

$$P_n^m(z) = (1-z^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(z)}{dz^m}$$

3.2. *Exercice.* (a) Montrer que $P_n^m(z)$ satisfont à l'equation différentielle

$$(1-z^2)u''(z) - 2zu'(z) + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{1-z^2} \right\} u(z) = 0$$

(b) Montrer que (a) est une équation hypergéométrique de schéma de Riemann

$$P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \infty & 1 \\ m/2 & n+1 & m/2 \; ; \;\; (1-z)/2 \\ -m/2 & -n & -m/2 \end{array} \right\}$$

(cf. 1.4; noter la différence entre le deux schémas).

3.3. *Orthogonalité.* Montrez que

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(z) P_r^m(z) dz = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \cdot \delta_{r,n},$$

cf. [WW], 15.51.

CHAPITRE VI. ÉQUATIONS DE MAXWELL ET L'ÉQUATION D'ONDES

§1. Des équations de Maxwell à l'équation d'ondes

Le but de ce chapitre et donner un exemple typique d'une application de fonctions speciales: pour la solution des *équations de Maxwell*, cf. [BW], 14.5.

1.1. On considère un champ électro-magnétique $(e^{\omega t}\mathbb{E}, e^{\omega t}\mathbb{H})$ où t est le temps, ω est *la fréquence*, $\mathbb{E} = (E_x, E_y, E_z)$ est le champ électrique; $\mathbb{H} = (H_x, H_y, H_z)$ est le champs magnétique. Les vecteurs $(\mathbb{E}, \mathbb{H})$ ne dependent pas de t; $\mathbb{E} = \mathbb{E}(z),\ \mathbb{H} = \mathbb{H}(z),\ z \in \mathbb{R}^3$ et satisfont aux équations de Maxwell:

$$\text{curl } \mathbb{H} = -k_1\mathbb{E} \tag{$M1$}$$

$$\text{curl } \mathbb{E} = k_2\mathbb{H} \tag{$M2$}$$

où k_1, k_2 sont des constantes complexes. On pose

$$k^2 = -k_1k_2$$

1.2. On introduit les coordonnées sphériques:

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi$$

$$z = r\cos\theta$$

Si $A = (A_x, A_y, A_z)$ est un vecteur alors

$$A_r = A_x\sin\theta\cos\phi + A_y\sin\theta\sin\phi + A_z\cos\theta$$

$$A_\theta = A_x\cos\theta\cos\phi + A_y\cos\theta\sin\phi - A_z\cos\theta$$

$$A_\phi = -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi$$

Exercice. Le vérifier. Pour s'entrainer, énoncez et prouvez les formules analogues, plus simples, pour les coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$.

1.3. Si $\mathbb{A}$ est un champ vectoriel sur $\mathbb{R}^3$ alors par définition

$$\text{curl } \mathbb{A} = \det\begin{pmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix}$$

En coordonnées sphériques

$$(\text{curl } \mathbb{A})_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\left\{\frac{\partial(rA_\phi\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial\phi}\right\}$$

$$(\text{curl } \mathbb{A})_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\left\{-\frac{\partial(rA_\phi\sin\theta)}{\partial r}+\frac{\partial A_r}{\partial\phi}\right\}$$

$$(\text{curl } \mathbb{A})_\phi = \frac{1}{r}\cdot\left\{\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right\}$$

(vérifier!).

1.4. Il s'en suit que les équations de Maxwell en coordonnées sphériques s'ecrivent

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\left\{\frac{\partial(rH_\phi\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial\phi}\right\} = -k_1E_r \tag{$M1a$}$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\left\{-\frac{\partial(rH_\phi\sin\theta)}{\partial r}+\frac{\partial H_r}{\partial\phi}\right\} = -k_1E_\theta \tag{$M1b$}$$

$$\frac{1}{r}\cdot\left\{\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right\} = -k_1E_\phi \tag{$M1c$}$$

et

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\left\{\frac{\partial(rE_\phi\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial\phi}\right\} = k_2H_r \tag{$M2a$}$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\left\{-\frac{\partial(rE_\phi\sin\theta)}{\partial r}+\frac{\partial E_r}{\partial\phi}\right\} = k_2H_\theta \tag{$M2b$}$$

$$\frac{1}{r}\cdot\left\{\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial E_r}{\partial\theta}\right\} = k_2H_\phi \tag{$M2c$}$$

On va chercher une solution sous une forme d'une somme de deux ondes

$$(\mathbb{E},\mathbb{H}) = ({}^e\mathbb{E},\ {}^e\mathbb{H}) + ({}^m\mathbb{E},\ {}^m\mathbb{H})$$

avec

$${}^eE_r = E_r,\ {}^eH_r = 0$$

et

$${}^mE_r = 0,\ {}^mH_r = H_r$$

L'onde $({}^e\mathbb{E},\ {}^e\mathbb{H})$ est appelée *l'onde électrique*, et $({}^m\mathbb{E},\ {}^m\mathbb{H})$ est appelée *l'onde magnétique.*

Procédons à chercher une solution $({}^e\mathbb{E},\ {}^e\mathbb{H})$. Les équations ($M1b$) et ($M1c$) deviennent:

$$k_1\ {}^eE_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\ {}^eH_\phi)}{\partial r} \tag{$M1b$}'$$

$$k_1\ {}^eE_\phi = -\frac{1}{r}\frac{\partial(r\ {}^eH_\theta)}{\partial r} \tag{$M1c$}'$$

En substituant dans ($M2b$) et ($M2c$), on obtient:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+k^2\right)(r\ {}^eH_\theta) = -\frac{k_1}{\sin\theta}\frac{\partial\ {}^eE_r}{\partial\phi} \tag{$M2b$}'$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+k^2\right)(r\ {}^eH_\phi) = k_1\frac{\partial\ {}^eE_r}{\partial\theta} \tag{$M2c$}'$$

On voit l'arrivée graduelle de l'équation des ondes...

Par contre, après la substitution de $(M1b)'$ et $(M1c)'$, l'équation $(M2a)$ devient:

$$\frac{1}{k_1^2 r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta\ {}^eH_\theta)+\frac{\partial}{\partial\phi}(r\ {}^eH_\phi)\right\}=0 \qquad (M2a)'$$

qui est satisfaite si

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta\ {}^eH_\theta)+\frac{\partial}{\partial\phi}(r\ {}^eH_\phi)=0 \qquad (M2a)''$$

ce qui signifie que

$$\operatorname{div}\ {}^e\mathbb{H}=0 \qquad (M2a)'''$$

(vérifier!).

1.5. *Potentiel.* Il nous faut s'occuper de l'équation $(M1a)$. L'équation $(M2a)$ sera satisfaite si

$${}^eE_\phi=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\phi},\ {}^eE_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}$$

Posons

$$U=\frac{\partial(r\ {}^e\Pi)}{\partial r},$$

donc on aura

$${}^eE_\phi=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2\ {}^e\Pi}{\partial r\partial\phi},\ {}^eE_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial^2\ {}^e\Pi}{\partial r\partial\theta}$$

Alors $(M1b)'$ et $(M1c)'$ seront satisfaites par

$${}^eH_\phi=k_1\frac{\partial\ {}^e\Pi}{\partial\theta}=\frac{k_1}{r}\frac{\partial(r\ {}^e\Pi)}{\partial\theta} \qquad (M1b)''$$

$${}^eH_\theta=-\frac{k_1}{\sin\theta}\frac{\partial\ {}^e\Pi}{\partial\phi}=-\frac{k_1}{r\sin\theta}\frac{\partial(r\ {}^e\Pi)}{\partial\phi} \qquad (M1c)''$$

En substituant cela dans $(M1a)$, on obtient

$${}^eE_r=--\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\ {}^e\Pi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\ {}^e\Pi}{\partial\phi^2}\right\} \qquad (M1a)'$$

1.6. *Laplacien.* En coordonnées sphériques

$$\Delta\Pi=\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\Pi)}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\ \Pi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Pi}{\partial\phi^2}$$

Exercice. Le vérifier.

1.7. Si l'on substitue $(M1a)', (M1b)''$ et $(M1c)''$ dans $(M2b)'$ et $(M2c)'$, on obtient deux équations

$$\frac{\partial}{\partial\phi}\{\Delta\ {}^e\Pi+k^2\ {}^e\Pi\}=0 \qquad (M2b)''$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\{\Delta\ {}^e\Pi+k^2\ {}^e\Pi\}=0 \qquad (M2c)''$$

en tenant compte de 1.6.

Il s'en suit que si le potentiel scalaire ${}^e\Pi$ satisfait à *l'équation d'ondes*

$$\Delta\ {}^e\Pi + k^2\ {}^e\Pi = 0$$

et les composantes ${}^eE_r,\ {}^eE_\theta,\ {}^eE_\phi,\ {}^eH_\theta,\ {}^eH_\phi$ sont définies par les formules 1.5, alors les champs ${}^e\mathbb{E} = ({}^eE_r,\ {}^eE_\theta,\ {}^eE_\phi),\ {}^e\mathbb{H} = (0,\ {}^eH_\theta,\ {}^eH_\phi)$ satisfont aux équations de Maxwell.

Les considérations pareilles s'appliquent au champs magnétique (${}^m\mathbb{E},\ {}^m\mathbb{H}$), et on arrive au théorème suivant.

1.8. *Théorème.* Soient ${}^e\Pi,\ {}^m\Pi$ deux solutions de l'équation d'ondes

$$\nabla^2\Pi + k^2\Pi = 0 \tag{Ondes}$$

et $k^2 = -k_1k_2$. Alors le champ $(\mathbb{E},\mathbb{H}) = (E_r, E_\theta, E_\phi; H_r, H_\theta, H_\phi)$ défini par les formules

$$E_r = {}^eE_r = \frac{\partial^2(r\ {}^e\Pi)}{\partial r^2} + k^2 r\ {}^e\Pi$$

$$E_\theta = {}^eE_\theta + {}^mE_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\ {}^e\Pi)}{\partial r\partial\theta} + \frac{k_2}{r\sin\theta}\frac{\partial(r\ {}^m\Pi)}{\partial\phi}$$

$$E_\phi = {}^eE_\phi + {}^mE_\phi = \frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial^2(r\ {}^e\Pi)}{\partial r\partial\phi} - \frac{k_2}{r}\frac{\partial(r\ {}^m\Pi)}{\partial\theta}$$

et

$$H_r = {}^mH_r = \frac{\partial^2(r\ {}^m\Pi)}{\partial r^2} + k^2 r\ {}^m\Pi$$

$$H_\theta = {}^mH_\theta + {}^eH_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\ {}^m\Pi)}{\partial r\partial\theta} - \frac{k_1}{r\sin\theta}\frac{\partial(r\ {}^e\Pi)}{\partial\phi}$$

$$H_\phi = {}^mH_\phi + {}^eH_\phi = \frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial^2(r\ {}^m\Pi)}{\partial r\partial\phi} + \frac{k_1}{r}\frac{\partial(r\ {}^e\Pi)}{\partial\theta}$$

(ici le deuxième triple s'obtient du premier en échangeant ${}^e\Pi$ avec ${}^m\Pi$ et k_1 avec $-k_2$) satisfait aux équations de Maxwell:

$$\text{curl}\ \mathbb{H} = -k_1\mathbb{E} \tag{M1}$$

$$\text{curl}\ \mathbb{E} = k_2\mathbb{H} \tag{M2}$$

§2. Une solution de l'équation d'ondes

2.1. On cherche une solution de l'équation

$$\nabla^2\Pi + k^2\Pi = 0$$

en coordonnées sphériques

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\Pi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Pi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Pi}{\partial\phi^2} + k^2\Pi = 0 \qquad (O)$$

sous une forme

$$\Pi(r,\theta,\phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

Alors (O) se separe en trois équations différentielles ordinaires:

$$\frac{d^2(rR)}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{\alpha}{r^2}\right)rR = 0 \qquad (J)$$

$$\frac{d}{\sin\theta d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left(\alpha - \frac{\beta}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0 \qquad (P)$$

et

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \beta\Phi = 0, \qquad (S)$$

α et β étant des constantes arbitraires (vérifier!).

2.2. Une solution générale de (S) est de la forme

$$a\cos(\sqrt{\beta}\phi) + b\sin(\sqrt{\beta}\phi)$$

Par contre, si l'on veut une fonction uniforme, il faut que $\beta = m^2,\ m \in \mathbb{Z}$. Donc une solution sera

$$\Phi(\phi) = a_m\cos(m\phi) + b\sin(m\phi)$$

2.3. Dans l'équation (P), faisons une substitution $\xi = \cos\theta$. On obtient une équation:

$$\frac{d}{d\xi}\left\{(1-\xi^2)\frac{d\Theta}{d\xi}\right\} + \left\{\alpha - \frac{m^2}{1-\xi^2}\right\}\Theta = 0$$

(vérifier!) Les solutions sont les fonctions adjointnes de Legendre. Afin qu'il soient uniforment, il faut que α soit de la forme $\alpha = l(l+1)$, l étant un entier positif:

$$\frac{d}{d\xi}\left\{(1-\xi^2)\frac{d\Theta}{d\xi}\right\} + \left\{l(l+1) - \frac{m^2}{1-\xi^2}\right\}\Theta = 0 \qquad (P)'$$

Les solutions seront:

$$P_l^{(m)},\ m = -l, -l+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, l-1, l$$

2.4. Enfin, l'équation (J) après un changement

$$kr = \rho,\ R(r) = \frac{Z(\rho)}{\sqrt{\rho}}$$

se transforme en:

$$\frac{d^2Z}{d\rho^2} + \frac{dZ}{\rho d\rho} + \left(1 - \frac{(l+1/2)^2}{\rho}\right)Z = 0 \qquad (J)'$$

Celui-là est l'équation de Bessel, dont deux solutions independantes sont:

$$\psi_\ell(\rho) = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} J_{\ell+1/2}(\rho)$$

et

$$\chi_\ell(\rho) = -\sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} N_{\ell+1/2}(\rho)$$

Ici:

$$J_{\ell+1/2}(z) = (-1)^\ell \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} z^{\ell+1} \left(\frac{d}{zdz}\right)^\ell \frac{\sin z}{z}$$

et

$$N_{\ell+1/2}(z) = (-1)^\ell \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} z^{\ell+1} \left(\frac{d}{zdz}\right)^\ell \frac{\cos z}{z}$$

(la fonction de Neumann; une autre notation pour N_p est Y_p); donc

$$\psi_\ell(z) = (-1)^\ell z^{\ell+1} \left(\frac{d}{zdz}\right)^\ell \frac{\sin z}{z}$$

et

$$\chi_\ell(z) = (-1)^\ell z^{\ell+1} \left(\frac{d}{zdz}\right)^\ell \frac{\cos z}{z}$$

En d'autres termes, une solution générale de (J) est de la forme

$$c_l\psi_l(kr) + d_l\chi_l(kr)$$

où $c_l, d_l \in \mathbb{C}$.

2.5. Une solution générale de l'équation d'ondes (O) aura une forme

$$r\Pi(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \{c_l\psi_l(kr) + d_l\chi_l(kr)\} P_l^{(m)}(\cos\theta)\{a_{lm}\cos(m\phi) + b_{lm}\sin(m\phi)\}$$

Les valeurs des coefficients c_l, d_l, a_{lm}, b_{lm} de cette série sont déterminés par les conditions au bord.

On peut trouver un exemple intéressant dans [BW], 14.5: une description, d'après G.Mie et P.Debye (cf. [M], [D]) de la diffraction de la lumière sur une petite sphère métallique.

Bibliographie

Classiques

[Euler] Leonhardi Euleri Opera Omnia. Series Prima, Opera Mathematica, vv. I - XXIX, Lipsiae et Berolini typis et in aedibus B.G.Teubneri, 1911 - 1956. (a) Introduction à l'Analyse Infinitésimal, t. I, Paris, chez Barrois, aîné, L'An quatrième de la République Française (1796). (b) Evolutio formulae integralis $\int x^{f-1}xdx(lx)^{m/n}$ integratione a valore $x = 0$ ad $x = 1$ extensa, Novi commentarii academiae scientarium Petropolitanae, **16** (1771), 1772, pp. 91 - 139 = Opera, v. XVII, pp. 316 - 357. (c) De summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum dissertatio altera in qua eaedem summationes ex fonte maxime diverso derivantur, *Miscellanea Berolinensia* **7**, 1743, p. 172 - 192 = Opera ???

[Gauss] Carl Friedrich Gauss, Werke, Bd. I - XII, Georg Olms Verlag, Hildesheim - New-York, 1973. (a) Circa seriem infinitam

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}xx + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 +$$

etc. Pars Prior, *Commentationes societatis regiae scientarum Gottingensis recentiores*, Vol. **II**, Gottingae MDCCCXIII = Werke, Bd. III, pp. 124 - 162. (b) Determinatio seriei nostrae per equationem differentialem secundi ordinis, Werke, Bd. III, pp. 207 - 229.

[Jacobi] C.-G.-J. Jacobi, Gesammelte Werke, Bd. I - VIII, Chelsea Publishing Co., 1969. (a) Demonstratio formulae

$$\int_0^1 w^{a-1}(1-w)^{b-1}dw = \frac{\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx \int_0^\infty e^{-x}x^{b-1}dx}{\int_0^\infty e^{-x}x^{a+b-1}dx} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Crelle J. für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 11, p. 307 = Werke, ???

[Riemann] B.Riemann, Gesammelte mathematische Werke, wissenscheftlicher Nachlass und Nachträge, Springer-Verlag, 1990. (a) Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebener Grösse, *Monatsberichte der Berliner Akademie*, November 1859 = Werke, pp. 177 - 185. (b) Zur Theorie der Nobilischen Farbenringe, *Annalen der Physik und Chemie*, Bd. **95**, 28 März 1855 = Werke, pp. 87 - 94.

Modernes

[BW] M.Born, E.Wolf, Principles of Optics.

[Debye] P.Debye, *Ann d. Physik* (4), **30** (1909), 57.

[GZ] B.Gross, D.Zagier, Heegner points and derivatives of L-series, *Invent. Math.*, **84** (1986), 225 - 320.

[M] G.Mie, Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen, *Ann d. Physik* (4), **25** (1908), 377.

[T] E.C.Titchmarsh, Introduction to the theory of Fourier integrals, Oxford at the Clarendon Press.

[W] G.N.Watson, A treatise on the theory of Bessel functions, 2nd edition, Cambridge University Press, 1995.

[WW] E.T.Whittaker, G.N.Watson, A course of modern analysis, Cambridge University Press, 1927.