FONCTIONS SPHÉRIQUES

ET SYSTÈMES INTÉGRABLES

Cours M2 Printemps 2012

Vadim Schechtman

NOMS

Israel GELFAND 1913 - 2009

HARISH-CHANDRA 1923 - 1983

Ian MACDONALD Né 1928

Introduction

0.1. Systèms intégrables. Un modèle (système) de la mécanique quantique de n particules sur la ligne $\mathbb{R}$.

Coordonnées: $x_1, \ldots, x_n$.

Fonction d'onde $\psi(x_1, \ldots, x_n)$, $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$.

$|\psi(x_1, \ldots, x_n)|$ est la probabilité que les particules ont les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$.

Équation de Schrödinger:

$$\frac{\partial \psi(t,x)}{\partial t} = \Delta \psi(t,x),$$

où

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + V(x_1, \ldots, x_n)$$

Équation stationaire:

$$\Delta \psi = E \psi,$$

E - energie.

Intégrabilité: existence de n opérateurs differentiels $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ d'ordres $1, \ldots, n$, tels que $\Delta_2 = \Delta$ et

$$[\Delta_i, \Delta_j] = 0$$

Si V ne depend que de différences $x_i - x_j$, on prend pour

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Prouvez que $[\Delta_1, \Delta] = 0$.

Ensuite, on cherche des vecteurs propres communs de tous Δ_i:

$$\Delta_i \psi = E_i \psi, \ 1 \leq i \leq n$$

0.2. Fonctions sphériques sont certaines fonctions (aux valeurs complexes) sur les *groupes de Lie réels* G ou sur leurs espaces homogènes $X = G/K$, *espaces symétriques.*

Exemples: $G = SL_n(\mathbb{R}), K = SO_n(\mathbb{R})$.

Pour $X = S^2 = SO(3)/SO(2)$ les fonctions sphériques sont les polynômes de Legendre, d'où leur nom.

Plus intéressantes sont les fonctions sphériques sur les espaces symétriques noncompacts, un exemple typique: le demi-plan de Poincaré $H = SL_2(\mathbb{R})/SO(2)$.

Fonctions sphériques satisfont aux équations differentielles du type Laplace. Ces équations peuvent être interpretées comme les *équations de Schrödinger* des certains systèmes quantiques des particules sur la ligne.

Ces sytèmes sont *intégrables*, ce qui veut dire que pour un système de $r = \mathrm{rk}(G)$ particules il y a r équations independantes

$$D_i f = \lambda_i f,\ [D_i, D_j] = 0,\ \lambda_i \in \mathbb{C}$$

$1 \leq i \leq r$.

Par exemple, pour $G = SL_{r+1}$ $\mathrm{rk}(G) = r$ et les degrés des équations sont $2, \ldots, r+1$.

Les éléments D_i sont appelés *Casimirs* par les physiciens. Ils sont les générateurs indépendants du centre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = Lie(G)$.

En tous cas, dans la Physique toujours il s'agit de trouver des vecteurs propres communs d'une grande algèbre commutative.

§1. Exemples de base: S^2, H, $\mathbb{R}^2$.

Dans les examples ci-dessous, le modèle est: $X = G/K$; Δ — un opérateur différentiel (d'ordre 2) G-invariant, *Laplacien*, sur X; on cherche les *fonctions sphériques*: fonctions propres de Δ K-invariantes.

(a) $\mathbb{R}^2$ *et fonctions de Bessel*

1.1. Considérons l'espace affine $X = \mathbb{R}^2$. Deux groupes agissent sur X:

le groupe de rotations $K = SO(2)$ et le groupe de translations $T \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$; on désigne par $G = M(2)$ le sous-groupe de $Aut(X)$ engendré par K et T, c'est le groupe d'automorphismes de X qui respectent la longueur. On a

$$G = T \ltimes K$$

(produit semi-direct).

Le sous-groupe K est le sous-groupe stabilisateur de $x_0 = (0, 0)$, et le quotient G/K s'identifie à X:

$$G/K \xrightarrow{\sim} X,\ g \mapsto g \cdot x_0$$

On a

$$K = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ a^2 + b^2 = 1,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

1.2. Laplacien. Considérons l'algèbre A des opérateurs différentiels

$$\partial = \sum a_{ij}(x, y)\partial_x^i \partial_y^j$$

G-invariants. Puisqu'ils sont T-invariants, les fonctions a_{ij} sont constants. Donc

$$A = \mathbb{C}[\partial_x, \partial_y]^K$$

L'exemple de base d'un opérateur G-invatiant est *l'opérateur de Laplace*

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$$

(vérifiez qu'il est G-invariant).

1.2.1. Exercice. Considérons l'anneau de polynômes $B = \mathbb{C}[u, v]$. K opère sur B par

$$(fk)(u, v) = f(au + bv, -bu + av),\ k = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Remarquez que cette action préserve les composantes homogènes.

Montrez que si $f \in B_n^K$, alors si n est impaire, $f = 0$ et si $n = 2m$ alors $f = cL^m,\ c \in \mathbb{C}$, où $L = u^2 + v^2$.

En concluez que $A = \mathbb{C}[\Delta]$. $\square$

En coordonnées polaires $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 = \Delta_r + \frac{1}{r^2}\Delta_\theta \tag{1.2.1}$$

Exercice. Prouvez (1.2.1).

1.3. Fonctions propres. On cherche des solutions de

$$\Delta f = -\lambda^2 f \tag{1.3.1}$$

On suppose que $\lambda \neq 0$.

Question. Comment s'appellent les solutions de (1.3.1) pour $\lambda = 0$?

Cherchons des solutions de la forme $f(re^{i\theta}) = e^{in\theta}\phi(r)$. Alors

$$\phi''_{rr} + \frac{1}{r}\phi'_r + \left(\lambda^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)\phi = 0 \tag{1.3.2}$$

C'est *l'equation de Bessel.* Cherchons des solutions sous une forme $\phi(r) = \sum_{i=0}^\infty a_i r^i$. On obtient:

$$n^2 a_0 = 0,\ (1-n^2)a_1 = 0,$$
$$(i^2 - n^2)a_i = -\lambda^2 a_{i-2}$$

1.4. Définition.

$$J_n(z) = \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{j!\Gamma(n+j+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2j+n},$$

$n, z \in \mathbb{C}$.

Posons

$$\phi_{\lambda,n}(r) = J_n(\lambda r)$$

C'est une solution de (1.3.2).

1.4.1. *Exercice.* Montrez que

$$\phi_{\lambda,n}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\lambda r\sin\theta - in\theta}d\theta$$

(b) S^2 *et polynômes de Legendre*

1.5. La sphère

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 |\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} = O(3)/O(2) = SO(3)/SO(2)$$

Notons que

$$SU(2) = \{\begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \mid |u|^2 + |v|^2 = 1\} \cong S^3$$

$$SU(2)/\pm 1 \cong SO(3) \cong \mathbb{RP}^2$$

et

$$S^2 \cong SU(2)/SO(2)$$

En coordonnées polaires

$$x_1 = R\cos\psi \sin r,\ x_2 = R\sin\psi\sin r,\ x_3 = R\cos r,$$

le Laplacien

$$\Delta_{\mathbb{R}^3} := \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i}^2 = \Delta_R + \frac{1}{R^2}\Delta_{S^2}$$

où

$$\Delta_R = \partial_R^2 + \frac{2}{R}\partial_R,$$

$$\Delta_{S^2} = \partial_r^2 + \cot r \partial_r + \frac{1}{\sin^2 r}\partial_\psi^2 = \Delta_r + \frac{1}{\sin^2 r}\partial_\psi^2 \Delta_{S^1}$$

L'opérateur Δ_{S^2} est $O(3)$-invariant.

1.6. *Exercice.* Montrez que

$$\Delta_{\mathbb{R}^n} = \partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^{n-1}}$$

1.7. *Coordonnées polaires sur S^2*: (r, ψ). r est la distance géodésique du pôle nord $(0, 0, 1)$.

Les $K = SO(2)$-orbites sont les parallèles.

On cherche les fonctions $\phi_\lambda(r)$ les solutions de

$$\Delta_r \phi_\lambda(r) = \phi_\lambda''(r) + \cot r \phi_\lambda'(r) = \lambda\phi_\lambda(r)$$

Les solutions existent que si $\lambda = -n(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, i.e.

$$\phi_\lambda''(r) + \cot r\phi_\lambda'(r) = -n(n+1)\phi_\lambda(r) \tag{1.7.1}$$

Formule explicite:

$$\phi_\lambda(r) = P_n(\cos r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos r + i \sin r\cos\psi)^n d\psi$$

Ici $P_n(z)$ sont les **polynômes de Legendre**, cf. [WW], 15.1.

$$P_0(z) = 1, P_1(z) = z, P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1), \ldots$$

Formule de Rodrigues:

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n$$

Orthogonalité:

$$\int_{-1}^{1} P_n(z)P_m(z)dz = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$$

Équation différentielle:

$$(1-z^2)P_n''(z) - 2zP_n(z) + n(n+1)P_n(z) = 0 \tag{1.7.2}$$

C'est l'équation (1.7.1) avec $z = \cos r$.

En effet,

$$(\partial_r^2 + \cot r\partial_r)f(\cos r) = (1-\cos^2 r)f''(\cos r) + 2\cos r f'(\cos r)$$

Relation de récurrence:

$$(n+1)P_{n+1}(z) - (2n+1)zP_n(z) + nP_{n-1}(z) = 0$$

(c) *H et fonctions de Legendre*

1.8. Le demi-plan de Poincaré:

$$H = \{\tau \in \mathbb{C} |\ \Im\tau > 0\} = SL_2(\mathbb{R})/SO(2)$$

Un autre modèle: le disque

$$D = \{z|\ |z| < 1\} = SU(1,1)/SO(2) = G/K$$

Ici

$$SU(1,1) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix} \mid |a|^2 - |b|^2 = 1\}$$

G agit sur D par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}\cdot z = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$$

K est le stabilisateur de o

$$K = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a}\end{pmatrix} \mid |a|^2 = 1\}$$

Les K-orbites $K\cdot z$ sont les circles $\{z|\ |z| = \text{const}\}$.

Les sous-groupes

$$A = \{a_t = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t\end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$$N = \{n_s = \begin{pmatrix} 1+is & -is \\ is & 1-is \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R}\}$$

On a un isomorphisme de groupes

$$e : \mathfrak{a} := \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} A, \; e(r) = a_r$$

On a

$$a_r \cdot o = \tanh r \in D$$

Soient

$$\mathfrak{a}_+ = \mathbb{R}_{>0}, \; A_+ = e(\mathfrak{a}_+).$$

Alors pour $0 < x < 1$

$$A_+ \cdot x =]0, 1[$$

Il s'en suit que

$$A_+ \times K \xrightarrow{\sim} D \setminus \{0\}, \; (a, k) \mapsto ak \cdot x$$

En coordonnées $z = x + iy$ la métrique

$$ds^2 = \frac{1}{(1 - x^2 - y^2)^2}(dx^2 + dy^2)$$

La distance géodésique:

$$d(o, \tanh t) = t$$

Le Laplacien G-invariant:

$$\Delta = (1 - x^2 - y^2)^2(\partial_x^2 + \partial_y^2)$$

1.9. Coordonnées géodésiques polaires. Pour $z \in D$ on pose $r = d(o, z)$. Alors

$$z = |z|e^{i\theta} = \tanh r e^{i\theta}$$

En coordonnées (r, θ) Δ prend la forme

$$\Delta = \partial_r^2 + 2\coth 2r\partial_r + \frac{4}{\sinh^2 2r}\partial_\theta^2 = \Delta_r + \frac{4}{\sinh^2 2r}\Delta_\theta$$

1.10. Définition. (a) Une fonction $\phi(z) = \phi(re^{i\theta})$ est dite *radielle* si elle ne depend pas de θ. Autrement dit, ϕ est constante le long des K-orbites.

(b) *Une fonction sphérique* sur D est une fonction $\phi(z)$ radielle un vecteur propre de Δ.

Donc $\phi(r)$ satisfait à

$$\phi''_{rr} + 2\coth 2r\phi'_r = \mu\phi \tag{1.10.1}$$

Toutes solutions de (1.10.1) sont analytiques (c'est une équation elliptique).

Une solution:

$$\phi_\lambda(r) = \phi_\lambda(a_r \cdot o) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cosh 2r - \sinh 2r\cos\theta)^{(-i\lambda+1)/2}d\theta \tag{1.10.2}$$

satisfait à

$$\Delta_r\phi_\lambda = -(\lambda^2+1)\phi_\lambda \tag{1.10.3}$$

On a

$$\phi_\lambda(a_r \cdot o) = \phi_{-\lambda}(a_{-r} \cdot o)$$

En faisant le changement

$$u = \tanh\theta/2,\ d\theta = \frac{2du}{1+u^2}$$

on obtient

$$\phi_\lambda(a_r \cdot o) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\cosh 2r + \sinh 2r \cdot \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^{(i\lambda-1)/2}\frac{du}{1+u^2} =$$

$$= \frac{e^{(i\lambda-1)r}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1+e^{-2r}u^2)^{(i\lambda-1)/2}(1+u^2)^{-(i\lambda+1)/2}du \tag{1.10.4}$$

Cf. 1.15 ci-dessous.

Fonction $c(\lambda)$ de Harish-Chandra

1.11. Définition.

$$c(\lambda) = \frac{\Gamma(i\lambda/2)}{\pi^{1/2}\Gamma((i\lambda+1)/2)}$$

1.12. Théorème. Si $\Re(i\lambda) > 0$,

$$\lim_{r\to\infty} e^{(-i\lambda+1)r}\phi_\lambda(a_r \cdot o) = c(\lambda)$$

Preuve. On peut appliquer à l'intégrale (1.10.4) le théorème de convergence dominée pour obtenir

$$\lim_{r\to\infty} e^{(-i\lambda+1)r}\phi_\lambda(a_r \cdot o) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1+u^2)^{-(1+i\lambda)/2}du =$$

$(t = (1+u^2)^{-1})$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^1 t^{(i\lambda+1)/2-3/2}(1-t)^{-1/2}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}B(i\lambda/2, 1/2) = \frac{1}{\pi}\frac{\Gamma(i\lambda/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma((i\lambda+1)/2)}$$

□

1.12.1. Rappels sur la fonction Beta d'Euler.

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx, \ \Re a, \Re b > 0.$$

Théorème (Euler)

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \tag{1.12.1.1}$$

Exercice. Prouvez cela par recurrence pur $b \in \mathbb{N}^*$ en montrant que:

$$B(a,b+1) = \frac{b}{a}B(a+1,b)$$
$$B(a,b) = B(a+1,b) + B(a,b+1)$$
$$B(a,b+1) = \frac{b}{a+b}B(a,b)$$

Démonstration de la formule d'Euler (Jacobi). On a

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y}x^{a-1}y^{b-1}dxdy$$

On fait le changement de variables $x+y = r, \ x = rw$, donc $0 \le r < \infty$, $0 \le w \le 1$ et $dxdy = rdwdr$, d'où

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^1 w^{a-1}(1-w)^{b-1}dw \int_0^\infty e^{-r}x^{a+b-1}dr = B(a,b)\Gamma(a+b)$$

□

Ondes entrants et sortants

1.13. Cherchons une solution de (1.10.3) sous une forme

$$\psi_\lambda(r) = e^{(i\lambda-1)r}\sum_{n=0} a_n(\lambda)e^{-2nr} \tag{1.13.1}$$

On obtient la rélation de récurrence

$$a_n(\lambda) = \sum_{k=1}^{[n/2]}(2n-4k-i\lambda+1)a_{n-2k}(\lambda)$$

On pose $a_0(\lambda) = 1$.

Supposons que $i\lambda \notin 1+2\mathbb{Z}$, donc la rélation est uniquement résoluble.

1.14. Théorème. *Si $i\lambda \notin 1+2\mathbb{Z}$,*

$$\phi_\lambda(r) = c(\lambda)\psi_\lambda(r) + c(-\lambda)\psi_{-\lambda}(-r)$$

Preuve. Les fonctions $\psi_{\pm\lambda}(\pm r)$ sont deux solutions de (1.10.3) linéairement indépendantes, d'où

$$\phi_\lambda(r) = f_+(\lambda)\psi_\lambda(r) + f_-(\lambda)\psi_{-\lambda}(-r)$$

Puisque $\phi_\lambda(r) = \phi_{-\lambda}(-r)$,

$$f_-(\lambda)(r) = f_+(-\lambda)(-r)$$

Enfin, $f(\lambda) = c(\lambda)$ grace à 1.12. $\square$

1.15. Équation différentielle pour les fonctions hypergémétriques. Cf. [L], Ch. XIV, §2.

1.15.1. Lemme - exercice. Soient

$$\psi_s(u,t) = t^{s-1}(1-t)^{s-1}(t+u)^{-s}$$
$$L_u = (u^2+u)\partial_u^2 + (1+2u)\partial_u$$

Alors

$$(L_u + s(1-s))\psi_s = s\partial_t\psi_{s+1}$$

$\square$.

Définissons

$$\phi_s(u) = \int_0^1 \psi_s(u,t)dt, \ \Re s > 0, u > 0$$

C'est plus au moins la fonction de Legendre (1.10.4).

Alors

$$(L_u + s(1-s))\psi_s = 0$$

C'est plus au moins l'équation de Laplace (1.10.3).

1.16. Exercice: de l'opérateur CM au laplacien. Considérons un opérateur de Calogero - Moser

$$C = \partial_r^2 - \frac{\mu(\mu-1)}{\sinh^2 r}$$

Montrez que

$$C(\sinh^\mu r f(r)) = \sinh^\mu r(f''(r) + 2\mu\coth r f'(r) + \mu^2),$$

i.e.

$$\sinh^{-\mu} r \circ C \circ \sinh^\mu r = \partial_r^2 + 2\mu\coth r\partial_r + \mu^2$$

§2. Une particule sur la ligne

2.1. Mécanique quantique.

Équation de Schrödinger

$$H\psi = h\partial\psi\partial t$$

où ψ est *la fonction d'onde*, h la constante de Planck

$$\psi = \psi(q_1, \ldots, q_n; t)$$

H *le Hamiltonien*

$$H = H(p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_n)$$

q *les coordonnées*; p *les "momenta"*

$$p_j = -i\partial/\partial q_j$$

$$[p_k, q_j] = ?\delta_{kj}$$

Ici H sera de la forme

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2 + U(q_1, \ldots, q_n)$$

U *le potentiel.*

Équation de Schrödinger stationnaire

$$H\psi = E\psi$$

Ici $\psi = \psi(q)$ ne depend pas de t.

E *l'energie.*

Dans ce chapitre on va considérer des exemples avec $n = 1$.

2.2. Exemple A. Potentiel g^2q^{-2}.

$$H = -\frac{1}{2}\partial_q^2 + \frac{\mu(\mu-1)}{2}q^{-2}$$

On s'interesse aux solutions de

$$H\psi_k = \frac{k^2}{2}\psi_k, \ \psi_k(0) = 0$$

Le spectre:

$$E_k := \frac{k^2}{2} \geq 0$$

L'état de base (”ground state”)

$$\psi_0(\mu) = q^\mu$$

Faisons **le changement de variables**

$$\psi_k = \phi_k \psi_0$$

Alors ϕ_k satisfont à

$$B_\mu \phi_k = -k^2 \phi_k \tag{2.2.1}$$

où

$$B_\mu = \partial_q^2 + \frac{2\mu}{q}\partial_q$$

Proposition. *Si $\mu = (n-1)/2$, B_μ est la partie radielle du laplacien Δ_n dans $\mathbb{R}^n$.*

Exercice: vérifiez-le.

Les fonctions propres de Δ_n sont les ondes planes

$$\phi_{k,\nu}(x) = e^{ik\nu\cdot x},\ x, \nu \in \mathbb{R}^n,\ |\nu| = 1.$$

Donc on peut obtenir les solutions de (2.2.1) par moyennisation

$$\phi_k(q) = \int_{|\nu|=1} e^{ik\nu\cdot x} d\mu(\nu),\ q = |x|$$

où $\mu(\nu)$ est la mesure invariante sur la sphère

$$S^{n-1} = \{\nu \in \mathbb{R}^n |\ |\nu| = 1\}$$

C'est la fonction de Bessel

$$\phi_k(q) = 2^{\mu-1/2}\Gamma(\mu+1/2)(kq)^{-(\mu-1)/2} J_{\mu-1/2}(kq) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\Gamma(\mu+1/2)}{m!\Gamma(\mu+1/2+m)} (kq/2)^{2m}$$

Asymptotique:

$$\phi_k(q) \to 2^\mu \pi^{-1/2} \Gamma(\mu+1/2)(kq)^{-\mu} \cos(kq - \mu\pi/2)$$

si $|q| \to \infty$.

2.3. Exemple B. Potentiel $g^2/\sin^2 q$. Cf. [SSAFR].

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\mu(\mu-1)}{2\sin^2 q}$$

Le spectre est discret

$$H\psi_\ell = \frac{(\ell+\mu)^2}{2}\psi_\ell,\ \ell \in \mathbb{N} \tag{2.3.1}$$

$$\psi_0(q) = \sin^\mu q$$

Après le changement de variables

$$\psi_\ell = \phi_\ell \psi_0$$

l'équation (2.3.1) vient en

$$B_\mu \phi_\ell = -\ell(\ell + 2\mu)\phi_\ell \tag{2.3.2}$$

où

$$B_\mu = \partial_q^2 + 2\mu \cot q \partial_q.$$

Si

$$\mu = \frac{n-1}{2},$$

B_μ est la partie radielle du laplacien Δ_{S^n} sur

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} |\ x = (\cos q, \sin q\bar{n}), \bar{n}^2 = 1\}$$

Les ondes planes (fonctions propres de Δ_{S^n}):

$$\phi_{\ell,\bar{\nu}}(q, \bar{n}) = (\cos q - i \sin q(\bar{\nu}, \bar{n}))^\ell$$

sont des états quantiques stationaires d'une particule libre sur la sphère.

Les solutions de (2.3.2) (fonctions zonales sphériques):

$$\phi_\ell(q) = \int_{\bar{\nu}^2=1} \phi_{\ell,\bar{\nu}}(q, \bar{n}) d\bar{\nu} =$$

$$= \frac{\Gamma(\ell+1)\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\ell+2\mu)} G_\ell^\mu(\cos q) =$$

(où G_ℓ^μ sont les polynômes de Gegenbauer)

$$= F(-\ell, \ell + \mu; \mu + 1/2; \sin^2 q)$$

2.4. Exemple C. Potentiel $g^2/\sinh^2 q$.

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\mu(\mu-1)}{2\sinh^2 q}$$

On cherche les solutions de

$$H\psi = E\psi \tag{2.4.1}$$

Le spectre est continu.

Posons

$$\psi_0(q) = \sinh^\mu q$$

C'est une solution avec $E_0 = -\mu^2/2$.

Après le changement de variables

$$\psi_k = \phi_k \psi_0$$

l'équation (2.4.1) vient en

$$B_\mu \phi_k = -(\mu_2 + k^2)\phi_k \tag{2.4.2}$$

où

$$B_\mu = \partial_q^2 + 2\mu \coth q \partial_q.$$

Si

$$\mu = \frac{n-1}{2},$$

B_μ est la partie radielle du laplacien Δ_{H^n} sur le hyperboloïde

$$H^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} |\ x = (\cosh q, \sinh q \bar{n}), \bar{n}^2 = 1\}$$

Les ondes planes (fonctions propres de Δ_{H^n}):

$$\phi_{k,\bar{\nu}}(q, \bar{n}) = (\cosh q - i \sinh q(\bar{\nu}, \bar{n}))^{-\mu + ik}$$

sont des états quantiques stationaires d'une particule libre sur le hyperboloïde.

Les solutions de (2.4.2) (fonctions zonales sphériques):

$$\phi_k(q) = \int_{\bar{\nu}^2=1} \phi_{k,\bar{\nu}}(q, \bar{n}) d\bar{\nu} =$$

$$= F((\mu + ik)/2, (\mu - ik)/2, \mu + 1/2; -\sinh^2 q)$$

Ce sont des fonctions de Legendre.

Asymptotique

$$\phi_k(q) \sim (c(k)e^{ikq} + c(-k)e^{-ikq})e^{-\mu q},\ q \to \infty$$

où

$$c(k) = \frac{\Gamma(ik)\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\mu + ik)\Gamma(\mu)}$$

Matrice de diffusion

$$S(k) = \frac{c(k)}{c(-k)} = \frac{\Gamma(ik)\Gamma(\mu - ik)}{\Gamma(-ik)\Gamma(\mu + ik)}$$

Les exemples B et C sont des cas particluliers des *systèmes de Calogero - Moser*.

2.5. Exemple D. Potentiel $g^2 e^{-q}$. Système de Toda et fonctions de Whittaker (cas $GL(2)$).

Équation de Schrödinger

$$(-\partial_q^2 + e^{-q})\psi_\lambda(q) = E\psi_\lambda(q) \tag{2.5.1}$$

Hyperboloïde à deux nappes

$$H^2: \ x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1$$

La nappe supérieure:

$$H_+^2 := \{x \in H^3 | \ x_0 > 0\}$$

Coordonnées horisphériques sur H_+^2:

$$x_0 = \cosh q/2 + \frac{z^2}{2}e^{q/2}, \ x_1 = \sinh q/2 - \frac{z^2}{2}e^{q/2},$$

$$x_2 = ze^{q/2}$$

Le laplacien sur H_+^2:

$$\Delta = \partial_q^2 - \frac{1}{2}\partial_q + \frac{e^{-q}}{4}\partial_z^2$$

Considérons l'espace de fonctions sur H_+^2

$$\mathcal{F} = \{f(x,z) | \ f(q,z) = e^{q/4+iz/2}\psi(q)\}$$

Alors l'équation

$$\Delta f_\lambda = E_\lambda f_\lambda$$

est équivalente à (2.5.1).

Le spectre: $E_\lambda > 0$; on pose $E_\lambda = \lambda^2/2$.

Asymptotique:

$$\psi_\lambda(q) \sim c(\lambda)e^{i\lambda q} + c(-\lambda)e^{-i\lambda q}, \ q \to \infty$$

$$\psi_\lambda(q) \to 0, \ q \to -\infty$$

Cherchons ψ_λ sous une forme

$$\psi_\lambda(q) = c(\lambda)e^{i\lambda q}\phi_\lambda(q) + c(-\lambda)e^{-i\lambda q}\phi_{-\lambda}(q),$$

$$\phi_\lambda(q) \to 1, \ q \to \infty$$

La fonction ϕ_λ satisfait à l'équation

$$(\partial_q^2 + 2i\lambda\partial_q)\phi_\lambda = e^{-q}\phi_\lambda$$

Faisons un Ansatz

$$\phi_\lambda(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda)e^{-nq}$$

Alors on obtient

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n(n-2i\lambda)}$$

En posant $a_0(\lambda) = 1$, il en découle

$$a_n(\lambda) = \frac{\Gamma(1-2i\lambda)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1-2i\lambda)},$$

d'où

$$f_\lambda(q) = \Gamma(1-2i\lambda)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nq}}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1-2i\lambda)} =$$
$$= \Gamma(1-2i\lambda) I_{-2i\lambda}(e^{-q/2})$$

Il s'en suit

$$\psi_\lambda(q) = c(\lambda) K_{-2i\lambda}(e^{-q/2}) =$$
$$= c(\lambda) e^{i\lambda q} \int_0^\infty t^{-1-2i\lambda} e^{-t-e^q/t} dt$$

La matrice de duffusion

$$S(\lambda) = \frac{\Gamma(1+2i\lambda)}{\Gamma(1-2i\lambda)}$$

2.6. Représentation de moment (transformée de Fourier). La fonction

$$\hat{\psi}_\lambda(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\lambda(q) e^{iqp} dq$$

satisfait à l'équation aux différences

$$(\lambda^2 - p^2)\hat{\psi}_\lambda(p) = \hat{\psi}_\lambda(p+1)$$

La solution qui s'annule lorsque $p \to \pm\infty$ est

$$\hat{\psi}_\lambda(p) = c(\lambda)\Gamma(-i(p-\lambda))\Gamma(-i(p+\lambda))$$

§3. Plusieurs particules

3.1. Systèmes de Calogero - Moser. On pose $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathfrak{H} = \mathbb{R}^n$, $p = (p_1, \ldots, p_n),\ p_j = -i\partial/\partial q_j$,

$$\mathfrak{h} = \{q \in \mathfrak{H} |\ \sum_{i=1}^{n} q_i = 0\}$$

Hamiltonien

$$H = \frac{p^2}{2} + g^2 \sum_{1 \le i < j \le n} V(q_i - q_j) \tag{3.1.1}$$

où

$$V(x) = x^{-2} \tag*{$(CM)_0$}$$

ou

$$V(x) = a^2 (\sinh ax)^{-2} \tag*{$(CM)_-$}$$

ou

$$V(x) = a^2 (\sin ax)^{-2} \tag*{$(CM)_+$}$$

L'espace de configuration: le cone (chambre de Weyl)

$$\Lambda = \{q \in \mathfrak{h} |\ q_i < q_j \text{ pour tous } i < j\}$$

dans les cas $(CM)_0$ ou $(CM)_-$. Donc dans ces cas on étudie le deplacement de n particules sur la ligne.

Dans le cas $(CM)_+$ l'espace de configuration est un simplex (alcove de Weyl)

$$\Lambda_a = \{q \in \Lambda |\ q_n - q_1 < 2\pi/a\}$$

3.2. Systèmes de Toda. Hamiltonien

$$H = \frac{p^2}{2} + g^2 \sum_{1 \le i \le n-1} V(q_i - q_{i-1})$$

où

$$V(x) = e^{-x} \tag*{(T)}$$

L'espace de confuguration est $\mathfrak{h}$.

§4. Espaces symétriques

4.0. Deux théorèmes fondamentaux.

4.0.1. Théorème *Pour chaque matrice hermitienne h il existe u unitaire et a diagonale, $a = diag(a_1, \ldots, a_n)$, $a_i \in \mathbb{R}$, telles que*

$$h = uau^{-1}$$

la collection $(a_1, \ldots, a_n)$ est unique à une permutation près. h est définie positive ssi tous $a_i > 0$.

4.0.2. Théorème (Décomposition polaire) *Chaque matrice $g \in GL_n(\mathbb{C})$ est uniquement le produit*

$$g = hu$$

où h est hermitienne définie positive et u unitaire.

Preuve: exercice. Uitilisez le fait que si $g = hu$ alors $gg^* = h^2$ et que gg^* est semi-définie positive. Ici $g^* = \bar{g}^t$. $\square$.

4.1. Exemples principaux des espaces symétriques. G — un groupe de Lie réel, $\sigma: \ G \xrightarrow{\sim} G$, $\sigma^2 = \mathrm{Id}$, $K = G^\sigma$, $X = G/K$.

(A) Cas euclidien: $G = K \times X_n^0$, $\sigma(k, a) = (k, -a)$, $K = SO(n)$,

$X_n^0 =$ l'espace de matrices réelles symétriques de trace 0.

L'action de G sur X: $(k, a) \cdot x = kxk^{-1} + a$.

$$K \backslash X_n^0 = \mathbb{R}^{n-1}/W$$

où

$$W = \Sigma_n$$

(B) Cas compact: $G = SU(n)$, $\sigma(g) = (g^t)^{-1}$, $K = SO(n)$

$X_n^+ = G/K =$ espace de matrices symétriques complexes unitaires, de determinant 1.

L'action de G sur X: $g \cdot x = gxg^t$.

$$K \backslash X_n^+ = (S^1)^{n-1}/W$$

(C) Cas non-compact: $G = SL(n, \mathbb{R})$, $\sigma(g) = (g^t)^{-1}$, $K = SO(n)$

$X_n^- = G/K =$ espace de matrices symétriques réelles définies positive, de determinant 1.

$$K \backslash X_n^- = \mathbb{R}_{>0}^{n-1}/W$$

L'action de G sur X: $g \cdot x = gxg^t$.

Versions complexes sont plus facile à comprendre:

$$Y_n^+ = (SU(n) \times SU(n))/SU(n) \cong SU(n)$$

L'action de $K = SU(n)$ sur Y_n^+ par conjugaison. Pour chaque u unitaire il existe u_1 unitaire telle que

$$u_1 u u_1^{-1} = \mathrm{Diag}(z_1, \ldots, z_n),\ |z_i| = 1$$

Donc

$$K\backslash Y_n^+/K \cong (S^1)^{n-1}/W,$$

$Y_n^- = SL_n(\mathbb{C})/SU(n) = n \times n$ matrices hermitiennes définies positives à determinant 1.

$K\backslash Y_n^-/K \cong \mathbb{R}_{>0}^{n-1}/W$

4.2. Systèmes de racines. $G = SL_n(\mathbb{R}) \supset K = SO(n)$, $A \subset G$ — le sous-groupe des matrices diagonales avec les éléments > 0.

$\mathfrak{g} = Lie(G) = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$,

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{h} = Lie(A)$$

$$\mathfrak{a} = \{\sum q_i = 0\} \subset \mathfrak{H} = \mathbb{R}^n = \{(q_1, \ldots, q_n)\}$$

On munit $\mathfrak{H}$ du produit scalaire standard, $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, ce qui permet d'identifier

$$\mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}^* = Hom_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}, \mathbb{R})$$

Racines:

$$\alpha_{ij} = q_i - q_j \in \mathfrak{a}^*,\ i \neq j$$

$$R = \{\alpha_{ij}, i \neq j\} \subset \mathfrak{a}^*$$

Racines positives:

$$R_+ = \{\alpha_{ij},\ i < j\} \subset R$$

Racines simples: $\alpha_i := \alpha_{i,i+1},\ 1 \leq i \leq n-1\}$.

Groupe de Weyl: $W = S_n : \mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}$, l'action induite par la permutation des coordonnées dans $\mathfrak{H}$.

Chambre de Weyl positive:

$$\mathfrak{a}^+ = \{q_1 < \ldots < q_n\} \subset \mathfrak{a};\ \bar{\mathfrak{a}}^+ = \text{cloture de } \mathfrak{a}^+$$

Murs:

$$\{q_i = q_j\} \subset \mathfrak{a}$$

4.3. Décomposition de Cartan. $K = SO(n) \subset G$, $\mathfrak{k} = Lie(K) = \mathfrak{so}(n) \subset \mathfrak{g}$.

Involution de Cartan: $\theta: \ \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$, $\theta(x) = -x^t$.

On a $\theta^2 = \mathrm{Id}$, donc les valeurs propres de θ sont ± 1. Alors

$$\mathfrak{k} = \{x \in \mathfrak{g} |\ \theta(x) = -x\}$$

Soit

$$\mathfrak{p} = \{x \in \mathfrak{g} |\ \theta(x) = x\}$$

(les matrices symétriques de trace 0). Alors

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

4.3.1.

$$\exp: \ \mathfrak{p} \xrightarrow{\sim} X_n^-$$

(les matrices symétriques definies positive de determinant 1).

4.3.2. Décomposition polaire:

$$K \times X_n^- \xrightarrow{\sim} G$$

Cf. [C].

4.3.3. Décomposition de Cartan.

$$G = KAK$$

Si $k_1 a k_2 = k_1' a' k_2'$ alors il existe $w \in W$ tel que $a' = w(a)$.

$$K \backslash G / K \stackrel{\sim}{=} \bar{\mathfrak{a}}^+$$

Système de Calogero - Moser est lié à cette décomposition.

4.4. Décomposition d'Iwasawa.

$$G = NAK$$

Système de Toda est lié à cette décomposition.

Coordonnées horosphériques sur $X = G/K$:

$$X = NA \stackrel{\sim}{=} N\mathfrak{h} = N\mathfrak{a}$$

§5. Opérateurs différentiels invariants.

5.1. Centre de l'algèbre enveloppante.

5.1.1. Exemple. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur n et $(,)$ un produit scalaire invariant. Par exemple $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$, $(x, y) = tr(xy)$.

Soit $x_1, \ldots, x_N$ une base de $\mathfrak{g}$, $\{x^i\}$ la base duale, $(x_i, x^j) = \delta_{ij}$. Alors

$$c = \sum_{i=1}^{N} x_i x^i \in Z(U\mathfrak{g})$$

C'est *l'élément de Casimir* de $\mathfrak{g}$; il ne depend pas du choix d'une base (prouvez!).

5.1.2. Exemple. Cf. [G], 2.3. Considérons la matrice $E \in Mat_n(U\mathfrak{gl}(n))$ avec $E_{ij} = e_{ij}$.

Les éléments

$$c_m = \operatorname{tr} E^m,\ 1 \leq m \leq n,$$

appartiennent à $Z(U\mathfrak{gl}(n))$.

Exercice. Prouvez cela en utilisant les rélations de commutation

$$[e_{ij}, e_{pq}] = \delta_{jp} e_{iq} - \delta_{iq} e_{jp}$$

On remarque que $c_1 = \sum e_{ii} = I_n \in \mathfrak{g}$.

Théorème (A.Capelli, 1890).

$$Z(U\mathfrak{gl}(n)) = \mathbb{C}[c_1, \ldots, c_n]$$

Groupes et algèbres de Lie simple classiques.

$A_r : SL(r+1)$

$B_r : SO(2r+1)$

$C_r : Sp(2r)$

$D_r : SO(2r)$

5.2. Cas quasi-classique.

Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ semisimple,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$$

5.2.1. Théorème. Soit

$$i :\ S(\mathfrak{g}^*) \longrightarrow S(\mathfrak{h}^*)$$

la restriction. Elle induit un isomorphisme

$$S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{h}^*)^W$$

□

Cf. [D], 7.3.5.

5.2.2. Assertion duale. Soit $J \subset S(\mathfrak{g})$ l'idéal engendré par $\mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{n}_+$. Alors

$$S(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{h}) \oplus J,$$

d'où la projection

$$j: \ S(\mathfrak{g}) \longrightarrow S(\mathfrak{h})$$

Elle induit un isomorphisme

$$S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{h})^W$$

□

Une autre notation: $\mathbb{C}[\mathfrak{g}] = S(\mathfrak{g}^*)$.

Cas quantique: isomorphisme de Harish-Chandra

5.3. Cf. [K] (a), V.5.

$$\rho = \frac{1}{2}\sum_{R_+} \alpha$$

Les éléments de la forme

$$u((q_i),(m_i),(p_i)) = X_{-\alpha_1}^{q_1} \ldots X_{-\alpha_b}^{q_b} H_1^{m_1} \ldots H_n^{m_n} X_{\alpha_1}^{p_1} \ldots X_{\alpha_b}^{p_p}$$

forment une base de $\mathfrak{g}$. Ici $\alpha_1, \ldots, \alpha_b$ — les éléments différents de R_+.

$$U\mathfrak{g} = \oplus_{\lambda \in Q(R)} U\mathfrak{g}_\lambda$$

On a

$$U\mathfrak{g}_0 = U\mathfrak{g}^{\mathfrak{h}},$$

c'est une sous-algèbre de $U\mathfrak{g}$, et

$$Z(U\mathfrak{g}) \subset U\mathfrak{g}_0$$

Soit

$$\tau: \ U\mathfrak{g} \longrightarrow U\mathfrak{h}$$

la projection.

$\tau|_{Z(U\mathfrak{g})}$ est un homomorphisme d'algèbres.

Notons

$$\psi: \ S\mathfrak{h} \xrightarrow{\sim} S\mathfrak{h}$$

l'automorphisme qui envoie

$$\psi(h) = h - \langle \rho, h\rangle \cdot 1,\ \ h \in \mathfrak{h}.$$

Considérons le composé

$$U\mathfrak{g}_0 \xrightarrow{\tau} S\mathfrak{h} \xrightarrow{\psi} S\mathfrak{h}$$

5.4. Théorème (Harish - Chandra). *La restriction* $\psi \circ \tau|_{Z(U\mathfrak{g})}$ *induit un isomorphisme d'algèbres commutatives*

$$\omega :\ \ Z(U\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} S\mathfrak{h}^W$$

qui ne depend pas du choix de $R_+ \subset R$.

Exemple. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$,

$$z = \frac{h^2}{2} + ef + fe = \frac{h^2}{2} + h + 2fe,$$

$$\tau(z) = \frac{h^2}{2} + h$$

On a $\langle \rho, h\rangle = 1$, donc $\psi(h) = h - 1$,

$$\omega(z) = \frac{h^2}{2} - \frac{1}{2} \in \mathbb{C}[h^2] = U\mathfrak{h}^W$$

Ici $W = \{e, w\},\ w(h) = -h$.

5.5. Homomorphisme de Harish-Chandra. Cf. [E], 4.3. Soit $D[\mathfrak{g}]$ l'algèbre des opérateurs différentiels polynomiels sur $\mathfrak{g}$.

Elle contient $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ en tant que la sous-algèbre des opérateurs d'ordre 0 et $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] = S(\mathfrak{g})$ en tant que la sous-algèbre des opèrateurs aux coefficients constants.

Pour $D \in D[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$ la restriction de D à $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}} \overset{\sim}{=} \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$ est donnée par un opérateur différentiel W-invariant avec des pôles aux hyperplans

$$\mathfrak{h}_\alpha = \{x \in \mathfrak{h} |\ (x, \alpha) = 0\} \subset \mathfrak{h},\ \ \alpha \in R,$$

cf. un exemple ci-dessous.

Il s'en suit un homomorphisme

$$HC' :\ \ D[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}} \longrightarrow D[\mathfrak{h}^o]^W$$

où

$$\mathfrak{h}^o = \mathfrak{h} \setminus \cup_{\alpha \in R} \mathfrak{h}_\alpha$$

HC' sera appelé *la partie radielle.*

Considérons l'élément $\delta \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$

$$\delta(x) = \prod_{\alpha>0} (x, \alpha)$$

et définissons

$$HC: \ D[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}} \longrightarrow D[\mathfrak{h}^o]^W$$

par

$$HC(D) = \delta HC'(D)\delta^{-1}$$

5.5.1. Théorème (Harish-Chandra)

$$HC(D[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}) \subset D[\mathfrak{h}]^W \subset D[\mathfrak{h}^o]^W$$

(les pôles disparaissent après conjugaison).

La restriction de HC *à* $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^{\mathfrak{g}} \subset D[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}})$ *coïncide avec* (5.2.2)

$$\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W$$

5.6. Exemple: l'opérateur de Laplace. Soient $\{x_i, 1 \leq i \leq n-1\}$ une base orthonormée de $\mathfrak{h}$, et $(e_\alpha, f_\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \alpha, \beta \in R_+$. Alors

$$\Delta_{\mathfrak{g}} = \sum_{i=1}^{n-1} \partial_{x_i}^2 + 2\sum_{\alpha>0} \partial_{f_\alpha}\partial_{e_\alpha} = \Delta_{\mathfrak{h}} + 2\sum_{\alpha>0} \partial_{f_\alpha}\partial_{e_\alpha}$$

(i) Pour $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$, $x \in \mathfrak{h}$,

$$HC'(\Delta_{\mathfrak{g}})f(x) = \Delta_{\mathfrak{h}} f(x) + 2\sum_{\alpha>0} \alpha(x)^{-1}\partial_{h_\alpha} f(x) \tag{5.6.1}$$

où

$$h_\alpha = [e_\alpha, f_\alpha]$$

Ceci est une conséquence de

$$(\partial_{f_\alpha}\partial_{e_\alpha} f)(x) = \alpha(x)^{-1}(\partial_{h_\alpha} f)(x) \tag{$*$}$$

où $h_\alpha = [e_\alpha, f_\alpha]$ (ici viennent les pôles).

Prouvons (*). On a

$$(\partial_{f_\alpha}\partial_{e_\alpha} f)(x) = \partial_s\partial_t f(x + tf_\alpha + se_\alpha)|_{s=t=0}$$

Conjuguons:

$$(e^{s\alpha(x)^{-1}\,\mathrm{ad}\, e_\alpha})(x + tf_\alpha + se_\alpha) = x + tf_\alpha + st\alpha(x)^{-1}h_\alpha + \ldots$$

(on utilise $[e_\alpha, x] = -\alpha(x)e_\alpha$). Puisque f est $\mathfrak{g}$-invariante, cela entraine (*).

(ii)

$$\delta^{-1}\Delta_{\mathfrak{h}}\delta = \Delta_{\mathfrak{h}} + 2\sum_{\alpha>0} \alpha(x)^{-1}\partial_{h_\alpha} \tag{5.6.2}$$

Ceci est une conséquence de

(iii)

$$\Delta_{\mathfrak{h}}(\delta) = 0$$

puisque δ est un polynôme sur $\mathfrak{h}$ de degré minimal alterné par rapport à l'action de W.

(5.6.1) et (5.6.2) entrainent

$$HC(\Delta_{\mathfrak{g}}) = \Delta_{\mathfrak{h}}$$

§6. Parties radiellles et Hamiltoniens

6.1. Parties K-radièlles des opérateurs différentiels. Soient X une variété sur laquelle agit un groupe de Lie K, $A \subset X$ une sous-variété telle que

$$X = KA$$

et transverse aux orbites de K, i.e. pour tout $x = ka \in X$

$$T_x X = T_x(Ka) \oplus T_a A$$

Exemple. $X = \mathbb{C}^*,\ K = S^1, A = \mathbb{R}_+^*$.

Alors en chaque point x on peut choisir des coordonnées locales divisées en deux parties: les coordonnées "le long de K" et les coordonnées "le long de A".

6.2. Parties radielles du Laplacien et Hamiltoniens de Calogero - Moser.

On considère les espaces symetriques de 4.1:

$$X_n^\beta = G^\beta / K,\ \beta = 0, +, -$$

où $K = SO(n)$, $G^+ = SU(n), G^- = SL_n(\mathbb{R})$ et

$$G^0 = K \times X_n^0,$$

$$X_n^0 = \{\text{matrices } n \times n \text{ symétriques réelles de trace } 0\}$$

Définissons les fonctions suivantes sur $\mathfrak{h}$.

$$f^\beta(q) = \prod_{\alpha \in R^+} f_\alpha^\beta(q),\ q \in \mathfrak{h}$$

où $\beta = 0, +, -$, et

$$f_\alpha^0(q) = (q, \alpha),$$

$$f_\alpha^+(q) = \sin((q, \alpha)),$$

$$f_\alpha^-(q) = \sinh((q, \alpha))$$

Fixons des coordonnées orthonormées $q_1, \ldots, q_{n-1}$ sur $\mathfrak{a} = \mathfrak{h}$. Soient $\partial_i = \partial / \partial_{q_i}$, $q_\alpha = (q, \alpha)$,

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i^2$$

6.2.1. Théorème. *La partie radielle L du laplacien sur X_n^β est égale à*

$$L^\beta = f^\beta(q) \sum_{i=1}^{n-1} \partial_{q_i} \cdot (f^\beta(q)) \cdot \partial_{q_i}$$

Explicitement,

$$L^0 = \Delta + \sum_{\alpha\in R_+} q_\alpha^{-1}\partial_\alpha$$
$$L^+ = \Delta + \sum_{\alpha\in R_+} \cot(aq_\alpha)\partial_\alpha$$
$$L^- = \Delta + \sum_{\alpha\in R_+} \coth(aq_\alpha)\partial_\alpha$$

Soit

$$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R_+} \alpha$$

6.3. Théorème (Olshanetsky - Perelomov). *Considérons les Hamiltoniens de Calogero - Moser* (3.1.1):

$$H_\beta = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{4}\sum_{1\le i<j\le n} V_\beta(q_i - q_j), \tag{6.3.1}$$

$\beta = 0, +, -,$ *où*

$$V_0(x) = x^{-2}, \qquad (CM)_0$$
$$V_-(x) = (\sinh x)^{-2}, \qquad (CM)_-$$
$$V_+(x) = (\sin x)^{-2}. \qquad (CM)_+$$

Alors

$$H_\beta = \frac{1}{2} f^\beta(q)(-L_r^\beta + \beta'\rho^2)(f^\beta(q))^{-1}$$

où $0' = 0, +' = 1, -' = -1.$

6.4. Système de Toda. Rappelons les coordonnée horosphériques sur $X = G/K$:

$$X = NA \stackrel{\sim}{=} \mathfrak{n}\mathfrak{a}$$

L'espace de configuration du système de Toda est $\mathfrak{a} = \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g} = Lie(G)$: la sous-algèbre de Cartan.

Pour $x \in X$ on désigne

$$x = yz,\ y \in N,\ z \in A$$

Fixons un caractère non-degeneré de $\mathfrak{n}$:

$$\tilde{\psi}: \ \mathfrak{n} = \oplus_{\alpha \in R_+} \mathbb{R}X_\alpha \longrightarrow \oplus_{\alpha \in \Pi} \mathbb{R}X_\alpha \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}, \ \phi(X_\alpha) = 1,$$

d'où un caractère de N

$$\psi: \ N \longrightarrow S^1 \subset \mathbb{C},$$
$$\psi(\exp(y')) = \exp(\tilde{\psi}(y'))$$

Considéronds l'espace de "fonctions de Whittaker"

$$W_\psi(X) = \{f \in C^\infty(X; \mathbb{C}) | \ f(yx) = \psi(y)f(x), \ y \in N, x \in X\}$$

Une telle fonction est determinée uniquement par ses valeurs sur $A = \exp \mathfrak{a}$.

6.5. Théorème. *Soient Δ_ψ la restriction du Laplacien sur X sur $W_\psi(X)$ et*

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \partial^2/\partial q_k^2 + \sum_{\alpha \in \Pi} e^{q_\alpha}$$

Alors

$$H = -\frac{1}{2} e^{-q_\rho} \Delta_\psi e^{q_\rho} + \rho^2$$

§7. Intégrabilité

7.1. Rappels. Soit G un groupe de Lie qui opère sur une variété X. Alors les éléments de $\mathfrak{g} = Lie(G)$ agissent sur $C^\infty(G)$ par des champs vectoriels.

Autrement dit, on a un morphisme canonique des algèbres de Lie

$$\nu:\ \mathfrak{g} \longrightarrow Vect(G) := Der(C^\infty(X))$$

défini comme suit. Pour $f \in C^\infty(X), z \in \mathfrak{g}$, soit $y_t = \exp(tz) \in G, t \in \mathbb{R}$. Alors

$$\nu(z)(f)(x) = \partial_z f(x) := \lim_{t=0} \frac{f(y_t \cdot x) - f(x)}{t}$$

Les éléments de $U\mathfrak{g}$ agissent par des opérateurs différentiels:

$$\nu:\ U\mathfrak{g} \longrightarrow Diff(G) := Diff(C^\infty(X))$$

7.2. Proposition. Soit $K \subset G$ un sous-groupe de Lie connexe, $\mathfrak{k} = Lie(K)$. Pour tout $z \in U\mathfrak{g}^{\mathfrak{k}}$ et $f \in C^\infty(X)^K = C^\infty(X/K)$, $\nu(z)f \in C^\infty(X)^K$.

7.3. Exemple-exercice. Cf. [G], 1.2, 2.3.4. Réalisons le demi-plan de Poincaré H comme un espace homogène

$$H = GL_2(\mathbb{R})/O(2) \cdot Z$$

où

$$Z = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\} \subset GL_2(\mathbb{R})$$

Chaque matrice $g \in GL_2(\mathbb{R})$ est un produit

$$g = b \cdot k \cdot d = \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot k \cdot d$$

où $k \in O(2), d \in Z$, $x, y \in \mathbb{R}, y > 0$ (décomposition d'Iwasawa).

Donc on peut identifier

$$H \cong \{\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$$

Montrez que dans ces coordonnées l'opérateur de Casimir

$$c = e_{11}e_{11} + e_{12}e_{21} + e_{21}e_{12} + e_{22}e_{22}$$

agit sur H comme

$$2y^2(\partial_x^2 + \partial_x^2)$$

7.4. Le centre $Z(U\mathfrak{g}) = U\mathfrak{g}^{\mathfrak{g}}$ agit sur $C^\infty(K\backslash X) = C^\infty(G//K)$, ce qui donne lieu aux $r = \operatorname{rank}\mathfrak{g}$ opérateurs différentiels independants.

Leur parties radielles sont essentiellement les Hamiltoniens de Calogero - Moser.

7.5. Opérateurs de Sekiguchi. Cf. [S], [M] (a). Soit $\mathfrak{a} = \mathbb{R}^n$. Introduisons les fonctions suivantes sur $\mathfrak{a}$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{a}$,

$$\alpha_{ij}(x) = x_i - x_j,$$
$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{i<j} \alpha_{ij},$$
$$\delta = \prod_{i<j} (e^{\alpha_{ij}} - e^{-\alpha_{ij}}).$$

On désigne

$$W = Aut(\{1, \ldots, n\})$$

(le groupe de Weyl de A_{n-1}); $\epsilon(w)$ va désigner le signe. On pose

$$wx = (x_{w(1)}, \ldots, x_{w(n)})$$

On désigne $\partial_i = \partial/\partial x_i$.

Soient ν un nombre complexe, t une indéterminée. On définit l'opérateur différentiel

$$\begin{aligned} D(t,\nu)(x) &= \frac{1}{\delta(h)} \sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{\rho(sx)} \prod_{i=1}^{n} (t + \partial_{w(i)} + (n+1-2i)\nu) \\ &= t^n + D(\nu)_1 t^{n-1} + \ldots + D(\nu)_n \end{aligned} \tag{7.5.1}$$

Ici $D(\nu)_i$, $1 \leq i \leq n$, sont les opérateurs différentiels sur $\mathfrak{a}$.

Exercice. Montrez que

$$D(\nu)_1 = \sum_{i=1}^{n} \partial_i,$$
$$D(\nu)_2 = \sum_{i<j} [\partial_i \partial_j - \nu \cot(x_i - x_i)(\partial_i - \partial_j)] - 2\langle \rho, \rho \rangle \nu^2$$

7.6. Théorème. *Pour tout ν fixé, les opérateurs $D(\nu)_i$ commutent.*

7.7. Théorème. *Si $\nu = 1/2$, 1, ou 2, les opérateurs $D(\nu)_i$ restreints sur le hyperplan*

$$\mathfrak{a}_0 = \{\sum x_i = 0\} \subset \mathfrak{a},$$

sont les parties K-radielles des laplaciens sur $X = G/K = SL_n(\mathbb{R})/SO(n)$, $SL_n(\mathbb{C})/SU(n)$ et $SL_n(\mathbb{H})/Sp(n)$ respectivement.

Polynômes de Jack

Cf. [M] (a); [MY], [SSAFR].

7.8. Opérateurs $D_r^{(a)}$. On travaille dans

$$\Lambda_n = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]^{S_n} = \oplus_{d=0}^{\infty}\Lambda_{n,p}$$

où $\Lambda_{n,p}$ est le sous-espace des polynômes homogènes de degré p.

Pour $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$, soit

$$x^a = \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}$$

Soit

$$\delta = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$$

Soit

$$\Delta(x) = \prod_{i<j}(x_i - x_j) = \sum_{w\in S_n} \epsilon(w)x^{w\delta}$$

(le déterminant de Vandermonde).

On introduit une fonction génératrice

$$\begin{aligned} D(t;\alpha) &= \Delta(x)^{-1}\sum_{w\in S_n}\epsilon(w)x^{w\delta}\prod_{i=1}^{n}(1 + t(\alpha x_i\partial_i + (w\delta)_i)) \\ &= \sum_{j=0}^{n} t^j D_j^{(\alpha)} \end{aligned}$$

où $\partial_i = \partial/\partial x_i$. Ici

$$D_j^{(\alpha)} : \ \Lambda_n \longrightarrow \Lambda_n$$

est un opérateur différentiel linéaire d'ordre j.

7.9. Exercice. Montrez que pour $f \in \Lambda_{n,p}$

$$D_0^{(\alpha)}f = f, \ D_1^{(\alpha)}f = (p\alpha + n(n-1)/2)f,$$

$$D_2^{(\alpha)}f = (C(n,p,\alpha) - \alpha(\alpha U + V))f$$

où

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\partial_i^2,$$

$$V = \sum_{i\neq j} \frac{x_i^2}{x_i - x_j}\partial_i,$$

□

7.10. Produit scalaire. On définit

$$\langle u, v\rangle_\alpha = \int_{T^n} u(z)\overline{v(z)}|\Delta(z)|^{2/\alpha} dz$$

où

$$T^n = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n |\ |z_i| = 1, 1 \leq i \leq n\}$$

et dz est la mesure de Haar sur T^n normalisée de telle façon que

$$\langle 1, 1\rangle_\alpha = 1$$

Puisque u, v sont des polynômes réels,

$$\overline{v(z)} = v(z^{-1}),\ \ z \in T^n$$

De même

$$|\Delta(z)|^2 = \Delta(z)\Delta(z^{-1}) = \prod_{i\neq j}(1 - z_i/z_j), z \in T^n$$

7.11. Conjecture de Dyson (déjà un théorème), cf. [M] (c). Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ le terme constant

$$\mathrm{CT}\prod_{i\neq j}(1 - z_i/z_j)^a = \frac{(an)!}{(a!)^n}$$

7.12. Théorème. Pour tous u, v, j

$$\langle D_j^{(\alpha)} u, v\rangle = \langle u, D_j^{(\alpha)} v\rangle$$

7.13. Partitions. *Une partition* est une suite

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r),\ \ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_r,\ \ \lambda_i \in \mathbb{N}^*$$

$$\ell(\lambda) = r,\ \ |\lambda| = \sum_i \lambda_i$$

Pour tout λ, avec $l(\lambda) = r \leq n$ et $|\lambda| = p$, on définit

$$m_\lambda = \sum_{w\in S_n} w(x_1^{\lambda_1} \ldots x_r^{\lambda_r})$$

Ces polynômes homogènes symétriques forment une base de $\Lambda_{n,p}$.

Ordre partiel. On écrit

$$\lambda \geq \mu$$

si

$$\sum_{j=1}^{i} \lambda_j \geq \sum_{j=1}^{i} \mu_j$$

pour tout i.

7.14. Théorème (triangularité).

$$D_j^{(\alpha)} m_\lambda = \sum_{\mu \leq \lambda} b_{\lambda\mu} m_\mu$$

□

7.15. Orthogonalisation. Soit

$$\mathcal{P}_{n,p} = \{\lambda |\ |\lambda| = n,\ \ell(\lambda) = p\}$$

Choisissons sur $\mathcal{P}_{n,p}$ un ordre total $\prec$ tel que

$$\lambda < \mu \Longrightarrow \lambda \prec \mu$$

par exemple l'ordre lexicographique.

Fixons $p \leq n$. Appliquons le processus d'orthogonalisation de Gram - Schmidt à $\Lambda_{n,p}$ par rapport à $\prec$ en commençant par

$$e_p = m_{1^p}$$

On obtient une base orthonogonale $\{\tilde{J}_\lambda^{(\alpha)}\} \subset \Lambda_{n,p}$ telle que

$$\tilde{J}_\lambda^{(\alpha)} = \sum_{\mu \leq \lambda} c_{\lambda\mu} m_\mu$$

Alors Thms 7.12 et 7.14 impliquent

$$D_j^{(\alpha)} \tilde{J}_\lambda^{(\alpha)} = c_{j,\lambda}^{(\alpha)} \tilde{J}_\lambda^{(\alpha)},$$

d'où

7.16. Théorème. *Fixons α. Tous les operateurs $D_j^{(\alpha)}$, $1 \leq j \leq n$, commutent.*

7.17. Normalisation. J_λ est un multiple de $\tilde{J}_\lambda$ dont le coefficent de $e_p = m_{1^p}$ est $p!$.

7.18. Formule explicite et le rôle distingué de l'opérateur de Laplace. Théorème (cf. [MY]). *Posons*

$$D(\alpha) = \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \partial_i^2 + \sum_{i \neq j} \frac{x_i^2}{x_i - x_j} \partial_i$$

(c'est $\alpha U + V$ de 7.9). *J_λ est un seul polynôme de la forme*

$$J_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} a_{\lambda\mu} m_\mu$$

tel que

$$D(\alpha) J_\lambda = e_\lambda(\alpha) J_\lambda$$

où

$$e_\lambda(\alpha) = \frac{\alpha}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\lambda_i - 1) - \sum_{i=1}^{n}(i-1)\lambda_i + (n-1)|\lambda|$$

$\square$

7.19. Pour $\alpha = 2$ les polynômes J_λ sont les fonctions sphériques sur $X = SL_n(\mathbb{R})/SO(n)$.

§8. Transformation sphérique (cas $SL_2(\mathbb{R})$)

8.1. Éléments de la géométrie non-euclidienne: le modèle de Poincaré de H. On se met dans le cadre de §1, (c).

La métrique. Si $z = x + iy \in D,\ u, v \in T_z D$, leur produit scalaire est

$$\langle u, v\rangle = \frac{(u, v)}{(1 - |z|^2)^2}$$

où $(,)$ est le produit scalaire standard dans $\mathbb{R}^2$.

L'élément de longeur

$$ds^2 = \frac{x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2}$$

L'action de $G = SU(1, 1)$ respecte la métrique.

La distance

$$d(o, z) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

$$d(o, a_t \cdot o) = d(o, \tanh t) = t,\ t \in \mathbb{R}$$

$$a_t \cdot \tanh u = \tanh(t + u)$$

Le bord

$$B = \partial\bar{D} = \{z|\ |z| = 1\} = G/NA,$$

ici $NA = AN =$ le stabilisateur de $b_0 = 1$.

Les géodésiques dans D sont les segments des circles orthogonaux à B.

Un *horocycle* est un circle $\xi \subset \bar{D}$ tangent à un point $b \in B$; ξ est orthogonal à chaque gédésique avec l'expremité b.

Pour tout $z \in D, b \in B$ il existe un seule horocycle $\xi(z, b)$ contenant z et b.

Le horocycles contenant b_0 sont les N-orbites

$$\xi(z, b_0) = N \cdot z$$

En effet, ils sont numérotés par $t \in \mathbb{R}$: $Na_t \cdot o$.

8.2. Fonctions propres du Laplacien. Pour tout $z \in D, b \in B$, soit

$$\langle z, b\rangle = d(o, \xi(z, b))$$

Explicitement

$$e^{2\langle z,b\rangle} = \frac{1 - |z|^2}{|z - b|^2} \tag{8.2.1}$$

Pour $z \in D, r = d(o,z)$,

$$z = |z|e^{i\theta} = \tanh r e^{i\theta}, \ -\infty < r < \infty$$

On a

$$\tanh r = a_r \cdot o$$

En coordonnées (r,θ) le Laplacien

$$L = \partial_r^2 + 2\coth 2r \partial_r + 4\sinh^{-2}(2r)\partial_\theta$$

On définit

$$\phi_\lambda(z) = \int_B e^{(i\lambda+1)\langle z,b\rangle} db$$

Cette fonction est *radielle*, i.e. ne depend pas de θ.

Explicitement, en posant $b = e^{i\theta}, db = d\theta/2\pi$,

$$\phi_\lambda(r) := \phi_\lambda(a_r \cdot o) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\cosh 2r - \sinh 2r \cos\theta)^{-(i\lambda+1)/2} d\theta$$

Cette fonction satisfait à

$$L\phi_\lambda = -(\lambda^2+1)\phi_\lambda, \ \phi_\lambda(o) = 1$$

$$\phi_\lambda = \phi_{-\lambda}$$

Voici la propriété fondamentale des fonctions sphériques.

8.2. Théorème de moyen. Il existe sur G une mesure de Haar telle que

$$\int_G f(g\cdot o)dg = \int_D f(z)dz, \ \int_K dk = 1 \tag{8.2.0}$$

Alors

$$\int_K \phi_\lambda(gk\cdot z)dk = \phi_\lambda(g\cdot o)\phi_\lambda(z), \ z \in D, \ g \in G \tag{8.2.1}$$

8.3. Transformation sphérique. *Élement d'aire dans* D: si

$$z = n_s a_t \cdot o = n_s \cdot \tanh t =$$
$$= \frac{(1+is)\tanh t - is}{is\tanh t + 1 - is} = \frac{\sinh t - ise^{-t}}{\cosh t - ise^{-t}},$$

(*les coordonnées horocycliques*) alors

$$d^2z = \frac{dzd\bar{z}}{2(1-|z|^2)} = e^{-2s}dsdt,$$

c'est-à-dire, pour une fonction $f(z)$ sur D,

$$\int_D f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(n_s a_t \cdot o)e^{-2s}dsdt$$

Définition. Étant donnée une fonction *radielle* $f(z)$ sur D, on pose

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_D f(z)\phi_{-\lambda}(z)dz = \int_G f(g\cdot o)\phi_{-\lambda}(g\cdot o)dg$$

8.4. Théorème (Harish-Chandra). (a) *Inversion:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(\lambda)\phi_\lambda(z)|c(\lambda)|^{-2}d\lambda$$

(b) *Formule de Plancherel:*

$$\int_D |f(z)|^2dz = \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{f}(\lambda)|^2|c(\lambda)|^{-2}d\lambda$$

La démonstration se déroulera en plusieurs étapes.

8.5. Première étape:

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(\lambda)|c(\lambda)|^{-2}d\lambda \tag{8.5.1}$$

Preuve de (8.5.1).

8.6. Pour $z = n_s a_t\cdot o$ on a

$$|z|^2 = \frac{\sinh^2 t + s^2e^{-2t}}{\cosh^2 t + s^2e^{-2t}}$$

Si

$$\cosh^2 u = \cosh^2 t + s^2 e^{-2t},$$

alors

$$\tanh u = |z|$$

Si f est radielle,

$$f(z) = f(\tanh u)$$

Définissons une fonction $F(x),\ x\geq\infty$, par

$$F(\cosh^2 u) = f(\tanh u).$$

Alors

$$F'(\cosh^2 u) = \frac{f'(\tanh u)}{2\sinh u\cosh^2 u}$$

et

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda t-t}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}F(\cosh^2 t + s^2e^{-2t})ds\Big)dt =$$

$(y = e^{-t}s)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda t}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}F(\cosh^2 t + y^2)dy\Big)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}\psi(\cosh^2 t)dt \tag{8.6.1}$$

où

$$\psi(v) = \int_{-\infty}^{\infty} F(v + y^2)dy$$

8.7. Lemme (Abel). *L'équation intégrale*

$$\psi(v) = \int_{-\infty}^{\infty} F(v + y^2)dy, \ v \geq 1,$$

se resoud par

$$F(w) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi'(w + z^2)dz$$

Exercice.

8.8. Il s'en suit que

$$f(0) = F(1) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi'(1 + z^2)dz =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi'(\cosh^2 t)\cosh t dt$$

De l'autre côté, (8.6.1) entraine par l'inversion de Fourier

$$\psi(\cosh^2 t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda)\cos(\lambda t)d\lambda$$

puisque $\tilde{f}(\lambda) = \tilde{f}(-\lambda)$. En dérivant,

$$2\psi'(\cosh^2 t)\cosh t \sinh t = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda)\lambda\sin(\lambda t)d\lambda$$

8.9. Lemme.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\lambda t}{\sinh t}dt = \pi\tanh(\pi\lambda/2)$$

Preuve. Intégrez la fonction $g(z) = e^{-\lambda z}/\sinh z$ le long de contour $\mathbb{R}\cup(\pi i+\mathbb{R})$. $\square$

8.9.1. Formule de Flensted-Jensen. Voici une généralisation du lemme, cf. [F], [H] (b), Ch. IV, Exercices D.

Soit G_0 un groupe semi-simple réel, G sa complexification, $K_0 \subset G_0$ un sous-groupe compact maximal, $K \subset G$ le sous-groupe avec l'algèbre de Lie $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 + i\mathfrak{k}_0$, où $\mathfrak{k}_0 = Lie(K_0)$ (NB: K n'est pas compact).

Soit $\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{g}_0 = Lie(G_0)$ une sous-algèbre de Cartan. Alors pour $\lambda \in \mathfrak{a}_0^*$,

$$|c_0(\lambda)|^{-2} = |\prod_{\alpha>0}(\alpha, \lambda)|^2 \int_K \phi_{2\lambda}(k)dk$$

Ici $c_0(\lambda)$ est la fonction de Harish-Chandra pour G_0, $\phi_{2\lambda}$ est la fonction sphérique pour G.

Par exemple, la fonction sphérique pour $G = SL_2(\mathbb{C})$ est

$$\phi(a\alpha)\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \frac{\sin 2at}{a \sinh 2t}$$

8.10. Il s'en suit que

$$f(0) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda)\frac{\lambda\pi}{2}\tanh\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)d\lambda$$

8.11. Lemme.

$$|c(\lambda)|^{-2} = \frac{1}{c(\lambda)c(-\lambda)} = \frac{\lambda\pi}{2}\tanh\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right).$$

Exercice.

Cela implique (8.5.1). $\square$

8.12. Deuxième étape.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda)\phi_\lambda(z)|c(\lambda)|^{-2}d\lambda \tag{8.12.1}$$

Preuve. Fixons $g \in G$ et considérons la fonction

$$h(z) = \int_K f(gkz)dk$$

Il est clair que $h(kz) = h(z)$ pour tout $k \in K$ i.e. h est radielle.

On a

$$\tilde{h}(z) = \int_K \left(\int_D f(gkz)\phi_{-\lambda}(z)dz\right)dk =$$

(puisque $\phi_{-\lambda}(z)$ est radielle)

$$= \int_D f(gz)\phi_{-\lambda}(z)dz = \int_D f(z)\phi_{-\lambda}(g^{-1}z)dz =$$

$$= \int_D f(z)\phi_{-\lambda}(g^{-1}kz)dz$$

pour tout $k \in K$ puisque $f(z) = f(kz)$. Donc

$$\tilde{h}(\lambda) = \int_K \int_D f(z)\phi_{-\lambda}(g^{-1}kz)dzdk = \int_D f(z) \int_K \phi_{-\lambda}(g^{-1}kz)dkdz =$$

par le théorème de moyenne (8.2.1)

$$= \phi_{-\lambda}(g^{-1} \cdot o)\tilde{f}(\lambda)$$

Maintenant appliquons (8.5.1) à h: puisque $k \cdot o = o$,

$$h(0) = f(g \cdot o) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda)\phi_\lambda(g \cdot o)|c(\lambda)|^{-2}d\lambda,$$

ce qui donne (8.12.1). $\square$

8.13. Troisième étape: formule de Plancherel.

$$\int_D |f(z)|^2 dz = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\lambda)|^2 c(\lambda)|^{-2} d\lambda \tag{8.13.1}$$

Pour f_1, f_2 radielles définissons leur *convolution* par

$$(f_1 * f_2)(g \cdot o) = \int_G f_1(h \cdot o) f_2(h^{-1}g \cdot o)dh$$

Exercice. Montrez que $f_1 * f_2$ est radielle.

8.14. Lemme.

$$(f_1 * f_2)^{\sim} = \tilde{f}_1 \cdot \tilde{f}_2$$

Preuve.

$$(f_1 * f_2)^{\sim}(\lambda) = \int_G \int_G f_1(h \cdot o) f_2(h^{-1}g \cdot o)\phi_{-\lambda}(g \cdot o)dhdg =$$

$$= \int_G f_1(h \cdot o)\left(\int_G f_2(g \cdot o)\phi_{-\lambda}(hg \cdot o)dg\right)dh$$

Pour tout $k \in K$

$$\int_G f_2(g \cdot o)\phi_{-\lambda}(hg \cdot o)dg = \int_G f_2(kg \cdot o)\phi_{-\lambda}(hg \cdot o)dg =$$

$$= \int_G f_2(g \cdot o)\phi_{-\lambda}(hk^{-1}g \cdot o)dg,$$

donc

$$\int_G f_2(g \cdot o)\phi_{-\lambda}(hg \cdot o)dg = \int_K \int_G f_2(kg \cdot o)\phi_{-\lambda}(hg \cdot o)dgdk =$$

$$= \int_K \int_G f_2(g \cdot o) \phi_{-\lambda}(hk^{-1} g \cdot o) dg dk.$$

Il s'en suit:

$$(f_1 * f_2)^{\sim}(\lambda) = \int_G f_1(h \cdot o) \bigg(\int_G f_2(g \cdot o) \bigg(\phi_{-\lambda}(hkg \cdot o) dk \bigg) dg \bigg) dh =$$

par (8.2.1)

$$= \tilde{f}_1(\lambda) \tilde{f}_2(\lambda)$$

□

§9. Fonctions sphériques et l'algèbre de Hecke

9.1. Algèbre de Hecke. Soient $G = SL_n(\mathbb{R}) \supset K = SO(n)$. On a une involution évidente $\tau : G \longrightarrow G$ telle que $K = G^\tau$.

Soit $X = G/K$; G opère à gauche sur X. Soit $\mathcal{D}_G(X)$ l'algèbre des opérateurs différentiels G-invariants. Rappelons que c'est une algèbre commutative isomorphe à une algèbre de polynômes à $n-1$ variables $\mathbb{C}[\Delta_2, \ldots, \Delta_n]$.

On fixe une mesure de Haar dg sur G telle que

$$\int_K dg = 1$$

Le groupe G est *unimodulaire*:

$$dg = dg^{-1}$$

L'espace $C_c(G)$ de fonctions continues à support compact $f: G \longrightarrow \mathbb{C}$ est une algèbre par rapport à la convolution

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)dy$$

(C'est l'analogue de l'anneau $\mathbb{C}[H]$ d'un groupe fini H.)

On désigne par $\mathcal{H}(G)$ le sous-anneau

$\mathcal{H}(G) = C_c(K\backslash G/K) = \{f \in C(G)|\ f(k_1 x k_2) = f(x)$ pour tous $k_1, k_2 \in K\}$

Exercice. Montrez que $\mathcal{H}(G)$ est stable par rapport à la convolution.

9.2. Théorème (Gelfand). *$\mathcal{H}(G)$ est commutatif.*

Preuve. Tout d'abord, la mesure dg est invariante par rapport à τ; en effet,

$$dg^\tau = \Delta(\tau)dg,\ \Delta(\tau) > 0$$

puisque G est unimodulaire et $g \mapsto g^{\tau-1}$ est un automorphisme de G. Puisque $\tau^2 = \mathrm{Id}$, $\Delta(\tau) = 1$.

9.2.1. Lemme. *Pour tout $g \in G$ il existent $k_1, k_2 \in K$ tels que*

$$g^\tau = k_1 g k_2$$

Preuve. Utilisons la décomposition polaire:

$$g = sk,$$

$k \in K$, s symétrique. Alors

$$g^\tau = k^{-1}s = k^{-1}gk$$

□

Donc pour $f \in C(G//K)$, $f(g^\tau) = f(g)$.

Pour $f, g \in \mathcal{H}(G)$ ou, plus généralement, pour $f \in \mathcal{H}(G), g \in \mathcal{H}(G//K)$,

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)dy$$

$(y = zx)$

$$= \int_G f(xz)g(z^{-1})dz = \int_G f(z^\tau x^\tau)g(z^{\tau-1})dz$$
$$= (g * f)(x^\tau) = (g * f)(\tau)$$

□

9.3. Définition. *Une fonction sphérique* est une fonction C^∞ $\phi : X \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que

(i) $\phi(kx) = \phi(x)$ pour tout $k \in K$;

(ii) $\phi(e) = 1$;

(iii) ϕ est une fonction propre de tout $D \in \mathcal{D}_G(X)$.

On peut regarder ϕ aussi comme une fonction bi-K-invariante sur G.

9.4. Théorème. Une fonction continue $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$, pas identiquement 0, est sphérique ssi

$$\int_K f(xky)dk = f(x)f(y)$$

pour tous $x, y \in G$.

9.5. Théorème. (i) *Soit $\phi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ continue bi-K-invariante. Alors ϕ est sphérique ssi*

$$L(\phi) : \mathcal{H}(G) \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$L(\phi)(f) = \int_G f(x)\phi(x)dx$$

est un homomorphisme d'algèbres.

(ii) *Réciproquement, tout morphisme continue d'algèbres $L : \mathcal{H}(G) \longrightarrow \mathbb{C}$ a une forme $L(\phi)$ où ϕ est une fonction sphérique bornée.*

9.6. Considérons l'espace

$$C(G//K) = C(K\backslash G/K)$$

de fonctions continues $\phi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ bi-K-invariantes. Donc $\mathcal{H}(G) \subset C(G//K)$ est le sous-espace de fonctions à support compact.

$\mathcal{H}(G)$ agit sur $C(G//K)$ par convolution: pour $f \in \mathcal{H}(G)$

$$H(f): \ C(G//K) \longrightarrow C(G//K),$$

$$H(f)(\phi) = f * \phi = \phi * f$$

(cf. la preuve de Thm. 9.2).

Les opérateurs $H(f)$, $f \in \mathcal{H}(G)$, sont appelés *les opérateurs de Hecke.*

Voici une définition équivalente de fonctions sphériques.

9.7. Théorème. *Une fonction $\phi \in C^\infty(G//K)$ est sphérique ssi $\phi(e) = 1$ et ϕ est un vecteur propre de tout $H(f)$, $f \in \mathcal{H}(G)$.*

Bibliographie

[C] Cl.Chevalley, Theory of Lie groups, I. Princeton University Press, 1946.

[D] J.Dixmier, Algèbres enveloppantes.

[E] P.Etingof, Lectures on Calogero - Moser systems, arXiv:math/0606233.

[FE] M.Flensted-Jensen, Spherical functions on a real semi-simple Lie group. A method of reduction to the complex case. *J. Funct. Anal.* **30** (1978), 65 - 92.

[Gel] I.M.Gelfand, Spherical functions on symmetric Riemannian spaces, *Dokl. Acad. Nauk SSSR* **70** (1950), 5 - 8.

[G] D.Goldfeld, Automorphic forms and L-functions for the group $GL(n, \mathbb{R})$.

[HO] G.J.Heckman, E.M.Opdam, Root systems and hypergeometric functions I, *Compos. Math.* **64** (1987), 329 - 352.

[H] S.Helgason, (a) Topics in harmonic analysis on homogeneous spaces; (b) Groups and geometric analysis.

[J] C.Jacobi, Problema trium corporum mutis attractionibus cubus distantiarum inverse proportionalibus recta linea se moventium, *Gesammelte Werke*, Band **4**.

[K] A.Knapp, (a) Lie groups beyond an introduction. (b) Representation theory of semisimple groups.

[L] S.Lang, $SL_2(\mathbb{R})$.

[M] I.G.Macdonald, (a) Commuting differential operators and zonal spherical functions, LNM **1271**, 189 - 200. (b) Symmetric functions and Hall polynomials, 2nd Edition. (c) Some conjectures for root systems, *SIAM I. Math. Anal.* **13** (1982), 988 - 1007.

[MY] K.Mimachi, Y.Yamada, Singular vectors of the Virasoro algebra in terms of Jack symmetric functions, *Comm. Math. Phys.* **147** (1995), 447 - 455.

[OP] M.Olshanetsky, A.Perelomov, (a) Quantum integrable systems related to Lie algebras, *Phys. Rep.* **94** (1983), 313 - 404. (b) Quantum systems connected with root systems and the radial parts of Laplace operators, Funct. Anal. Appl., **12**, no. 2 (1978), 60-68.

[O] E.M.Opdam, Root systems and hypergeometric functions IV, *Compos. Math.* **67** (1988), 191 - 209.

[S] J.Sekiguchi, Zonal spherical functions on some symmetric spaces, *Publ. RIMS Kyoto Univ.* **12** Suppl. (1977), 455 - 464.

[SSAFR] R.Sakamoto, J.Shiraishi, D.Arnaudon, L.Frappat, E.Ragoucy, Correspondence between conformal field theory and Calogero - Sutherland model, arXiv:hep-th/0407267.

[WW] E.T.Whittaker, G.N.Watson, A course of modern analysis.