SERIES GENERATRICES

Partie III. Fonctions arithmétiques et séries de Dirichlet

Examen Avril 2012

Corrigé

1. Définissons une fonction $\Lambda: \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ par: $\Lambda(1) = 0$;

$$\Lambda(p^m) = \log p$$

si p est premier, $m \geq 1$; $\Lambda(n) = 0$ si n n'est pas une puissance d'un nombre premier.

(a) Montrez que

$$\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d)$$

(Utilisez la décomposition de n en facteurs premiers.)

(b) Montrez que

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(n/d) \log d$$

Correction. (a) Soit

$$n = \prod_i p_i^{a_i},$$

donc

$$\log n = \sum_i a_i \log p_i$$

Les diviseurs de n de la forme p^a sont p_i^b, $1 \leq b \leq a_i$, d'où

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_i a_i \log p_i$$

(b) est la conséquence de (a) et de la formule d'inversion de Moebius.

2. Montrez que

$$-\frac{d \log \zeta(s)}{ds} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}, \ s > 1.$$

(Utilisez le produit eulerien de $\zeta(s)$.)

Correction. (a) Par définition

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{p \text{ premier}} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\log p}{p^a}$$

D'un autre côté

$$-\frac{d \log \zeta(s)}{ds} = \sum_p \frac{d \log(1-p^{-s})}{ds} =$$

$$= \sum_p \frac{\log p \cdot p^{-s}}{1-p^{-s}} = \sum_{p \text{ premier}} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\log p}{p^a}.$$

3. Montrez que si $d|n$ alors $\phi(d)|\phi(n)$.

(Vous pouvez utiliser la multiplicativité de ϕ pour réduire le problème au cas $n = p^a$.)

Correction. Par multiplicativité de ϕ il suffit de voir que $\phi(p^a)|\phi(p^b)$ pour tout p premier, $a \leq b$.

Or,

$$\phi(p^a) = p^{a-1}(p-1),$$

d'où l'assertion.

4. (a) Montrer que si m, n sont premiers entre eux et $d|(mn)$ alors d se décompose uniquement en produit $d = d'd''$ avec $d'|m, d''|n$.

(b) En déduire que si f et g sont deux fonctions arithmétiques multiplicatives, alors $f * g$ est multiplicative.

Correction. Supposons que $(m, n) = 1$.

(a) Soient

$$m = \prod_i p_i^{a_i}, \ n = \prod_j q_i^{b_j}$$

leurs décomposition en facteurs premiers. Alors $p_i \neq q_j$ pour tout i, j.

Si $d|(mn)$ et

$$d = \prod_k \ell_k^{c_k}$$

est son décompositions en facteurs premiers, alors l'ensemble

$$P = \{\ell_k\}$$

de ses facteurs premiers se décompose en deux parties disjoints $P = P' \coprod P''$:

$$P' = \{\ell_k |\ \ell_k = p_i \text{ pour quelque } i\}$$

et

$$P'' = \{\ell_k |\ \ell_k = q_j \text{ pour quelque } j\}$$

Alors on pose

$$d' = \prod_{\ell_k \in P'} \ell_k^{c_k},\ \ d'' = \prod_{\ell_k \in P''} \ell_k^{c_k}$$

et $d = d'd''$ est la décompositiion cherchée.

(b)

$$f * g(mn) = \sum_{d|mn} f(d)g(mn/d) = \sum_{d'|m, d''|n} f(d'd'')g(mn/d'd'') =$$

$$\sum_{d'|m, d''|n} f(d')f(d'')g(m/d' \cdot n/d'') = f * g(m)f * g(n).$$