Feuille 3

Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$. Une méthode d'intégration est dite d'ordre n si elle donne la valeur exacte de l'intégrale pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à n mais la valeur n'est pas exact pour la fonction $x \mapsto x^{n+1}$.

Rappel de la méthode d'intégration Newton-Cotes :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\mathrm{d}x \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

On considère le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux point $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$:

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(X). \tag{1}$$

Une valeur approché de l'intégrale de f est donc :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \approx \int_a^b P(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b l_i(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i). \tag{2}$$

Donc $(b-a)\omega_i = \lambda_i = \int_a^b l_i(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 1

Montrer que l'application

$$\begin{aligned} E \quad : \quad & \mathcal{C}([\alpha, \beta]) \mapsto \mathbb{R} \\ & f \mapsto \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{l} \lambda_k f(x_k) \end{aligned}$$

est une forme linéaire.

$$\begin{aligned} E(\mu f + g) = & \int_{\alpha}^{\beta} (\mu f(x) + g(x))\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{l} \lambda_k(\mu f(x_k) + g(x_k)) \\ = & \mu \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\mathrm{d}x - \left(\mu \sum_{k=0}^{l} \lambda_k f(x_k) + \sum_{k=0}^{l} \lambda_k g(x_k)\right) \\ = & \mu \left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{l} \lambda_k f(x_k)\right) + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{1} \lambda_k g(x_k) \\ = & \mu E(f) + E(g). \end{aligned}$$

Exercice 2

Montrer que les ω_i si-dessus ne dépendent pas de l'intervalle $[a, b]$.

On utilise le changement de variable :

$$[-1,1] \mapsto [a,b] \tag{3}$$
$$u \mapsto \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}u \overset{\text{def}}{=} x \tag{4}$$

On note les noeuds : $u_i \mapsto x_i = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}u_i$ et on remarque que $\frac{b-a}{2}\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$. D'où

$$\begin{aligned}
\omega_i(a,b) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b \prod_{j\neq i}\left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{b-a}\int_{-1}^1 \prod_{j\neq i}\left(\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}u-(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}u_j)}{\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}u_i-(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}u_j)}\right)\frac{b-a}{2}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \prod_{j\neq i}\left(\frac{(\frac{b-a}{2})(u-u_j)}{(\frac{b-a}{2})(u_i-u_j)}\right)\mathrm{d}u. \\
&= \frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^1 \prod_{j\neq i}\left(\frac{u-u_j}{u_i-u_j}\right)\mathrm{d}u \\
&= \omega_i(-1,1).
\end{aligned}$$

Donc quelque soit a et b, $\omega_i(a,b) = \omega_i(-1,1)$, il s'ensuit que ω_i ne dépend pas de l'interval $[a,b]$.

Exercice 3

1. Méthode du rectangle et du point milieu. Il s'agit d'interpoler la fonction f en un seul point x_0. Montrer que les méthodes du rectangle sont d'ordre 0 et la méthode du point milieu est d'ordre 1.

Par le changement de variable (4) il suffit de le montrer dans l'intervalle [-1,1]. Pour $x_0 = -1$ (rectangle à droite), $Tf \overset{\text{def}}{=} 2f(-1)$. Pour le polynôme $x \mapsto 1$,

$$\begin{aligned}
E(x \mapsto 1) &= \int_{-1}^1 1\mathrm{d}u - 2(1) \\
&= [u]_{-1}^1 - 2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc la méthode est au moins d'ordre 0.

$$\begin{aligned} E(u \mapsto u) &= \int_{-1}^{1} u \mathrm{d}u - 2(-1) \\ &= [u^2/2]_{-1}^{1} + 2 \\ &= 2 \neq 0. \end{aligned}$$

Donc la méthode est d'ordre 0. La méthode des rectangles à droite est similaire.

Pour la méthode point milieu dans l'intervalle [-1,1] :

$$E(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-1}^{1} f(u)du - 2f(0).$$

$$\begin{aligned} E(u \mapsto 1) &= \int_{-1}^{1} 1\mathrm{d}u - 2(1) \\ &= 2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

La méthode est d'ordre au moins 0.

$$\begin{aligned} E(u \mapsto u) &= \int_{-1}^{1} u\mathrm{d}u - 2(0) \\ &= 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

La méthode est d'ordre au moins 1.

$$\begin{aligned} E(u \mapsto u^2) &= \int_{-1}^{1} u^2\mathrm{d}u - 2(0) \\ &= [u^3/3]_{-1}^{1} - 0 \\ &= 2/3 \neq 0. \end{aligned}$$

Donc la méthode est d'ordre 1.

2. Méthode du trapèze. Il s'agit d'interpoler f aux deux points $x_0 = a$ et $x_1 = b$. Déterminer l'ordre de cette méthode.

Pour la méthode du trapèze, $T(f) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)(f(a)/2 + f(b)/2)$. Par le changement de variable (4) il suffit de vérifier l'ordre dans l'intervalle [-1,1] :

$$\begin{aligned} E(u \mapsto 1) &= \int_{-1}^{1} 1\mathrm{d}u - 2(1/2 + 1/2) \\ &= 2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

La méthode est au moins d'ordre 0.

$$E(u \mapsto u) = \int_{-1}^{1} u\mathrm{d}u - 2(-1/2 + 1/2)$$
$$= 0 - 0 = 0.$$

La méthode est au moins d'ordre 1.

$$E(u \mapsto u^2) = \int_{-1}^{1} u^2\mathrm{d}u - 2(1/2 + 1/2)$$
$$= 2/3 - 2 = -4/3 \neq 0.$$

La méthode est d'ordre 1.

3. Méthode de Simpson. Il s'agit d'interpoler la fonction f aux points $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ et $x_2 = b$. Déterminer la valeur approchée de $\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t$ obtenue avec cette méthode. Montrer que la méthode de Simpson est d'ordre 3.

Dans l'intervalle [-1,1], on a $u_0 = -1$, $u_1 = 0$ et $u_2 = 1$.

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= \frac{1}{1-(-1)} \int_{-1}^{1} l_0(u)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \prod_{j \neq 1} \left(\frac{u - u_j}{u_0 - u_j} \right) \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(\frac{u - u_1}{u_0 - u_1} \right) \left(\frac{u - u_2}{u_0 - u_2} \right) \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(\frac{u - 0}{-1 - 0} \right) \left(\frac{u - 1}{-1 - 1} \right) \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} (u^2 - u)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{4}[u^3/3 - u^2/2]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{4}(1/3 - 1/2 - (-1/3 - 1/2)) \\
&= 1/6
\end{aligned}$$

Puisque $u_i = -u_{l-i}$ on a $\omega_i = \omega_{l-i}$, donc $\omega_2 = 1/6$. En outre, $\sum_{i=0}^{l} \omega_i = 1$, d'où $\omega_1 = 1 - (1/6 + 1/6) = 2/3$.

4. Montrer que pour une méthode d'ordre 0 où plus, $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$.

Si la méthode T est d'ordre 0, $E(x \mapsto 1) = 0$. Donc en prenant l'intervalle [-1,1] :

$$E(x \mapsto 1) = \int_{-1}^{1} 1 \mathrm{d}u - T(x \mapsto 1) = 0.$$

Alors

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}u = 2\sum_{i=0}^{l} \omega_i 1$$
$$2 = 2\sum_{i=0}^{l} \omega_i$$
$$1 = \sum_{i=0}^{1} \omega_i$$

Exercice 4

Soient $(x_1, x_2) \in [-1,1] \times [-1,1]$. et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. On note $T(f) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$.

1. Quelle conditions doivent vérifier x_1, x_2, λ_1 et λ_2 pour que T soit une méthode d'intégration

   (a) d'ordre au moins 0 ?

   La méthode est d'ordre 0, donc $E(x \mapsto 1) = 0$.

$$\int_{-1}^{1} 1 \mathrm{d}u = \lambda_1 1 + \lambda_2 1$$
$$2 = \lambda_1 + \lambda_2$$

   d'où

$$\lambda_2 = 2 - \lambda_1. \tag{5}$$

   On peut donc écrire $T(f) = \lambda f(x_1) + (2 - \lambda) f(x_2)$.

   (b) d'ordre au moins 1 (en supposant $\lambda_i \neq 0$) ?

   On a $E(x \mapsto x) = 0$, alors

$$\int_{-1}^{1} u \mathrm{d}u = \lambda x_1 + (2 - \lambda) x_2$$
$$0 = \lambda x_1 + (2 - \lambda) x_2$$
$$\lambda(x_1 - x_2) = -2x_2$$

donc
$$\lambda = 2x_2/(x_2 - x_1). \tag{6}$$

(c) d'ordre au moins 2 (en supposant $0 < \lambda_i < 2$) ?
On a $E(x \mapsto x^2) = 0$ en tenant compte de (6), on a

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} u^2 \mathrm{d}u &= \frac{2x_2}{x_2 - x_1} x_1^2 + (2 - \frac{2x_2}{x_2 - x_1}) x_2^2 \\ 2/3 &= \frac{2x_2 x_1^2 - 2x_1 x_2^2}{x_2 - x_1}\end{aligned}$$

ce qui implique
$$x_1 x_2 = 1/3. \tag{7}$$

2. Montrer que si la méthode est d'ordre au moins 2 et $x_1 = -x_2$, alors elle est de l'ordre 3 (on l'appelle la méthode de Gauss).

Avec (7) ceci donne $x_1 = -\sqrt{1/3}$, $x_2 = \sqrt{1/3}$ et $\lambda = 1$. On a vue que l'ordre de la méthode est au moins 2. Calculons $E(x \mapsto x^3)$:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} u^3 \mathrm{d}u - T(u \mapsto u^3) &= 0 - ((-\sqrt{1/3})^3 + (\sqrt{1/3})^3) \\ &= 0.\end{aligned}$$

L'ordre de la méthode est au moins 3. Calculons $E(x \mapsto x^4)$:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} u^4 \mathrm{d}u - T(u \mapsto u^4) &= 2/5 - ((-\sqrt{1/3})^4 + (\sqrt{1/3})^4) \\ &= 2/5 - 2/9 \neq 0.\end{aligned}$$

Alors la méthode est d'ordre 3.

Estimation de l'erreur. On suppose que la méthode utilisée est d'ordre $N \geq 0$. On note $T(f)$ la valeur approchée de $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. Si f est de classe $C^{N+1}([a, b] \mapsto \mathbb{R})$, alors l'erreur d'approximation est donnée par

$$E(f) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - T(f) = \frac{1}{N} \int_a^b K_N(t) f^{(N+1)}(t)\mathrm{d}t. \tag{8}$$

où K_N est la fonction $t \mapsto E(x \mapsto (x - t)_+^N)$ (appelée noyau de Peano).

Exercice 5

Soit

$$\begin{array}{rcl} g : [-1,1] & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^x. \end{array}$$

1. Donner une valeur approchée de $\int_{-1}^{1} g(t)\mathrm{d}t$ pour les méthodes du point milieu et du trapèze.

Point milieu :

$$\begin{aligned} T_{pm}(g) &= (1-(-1))1g(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Trapèze :

$$\begin{aligned} T_{trap}(g) &= (1-(-1))(g(-1)/2 + g(1)/2) \\ &= 1/e + e. \end{aligned}$$

2. Calculer le noyau de Peano pour la méthode du point milieu, et en déduire une expression de l'erreur commise.

La méthode est d'ordre 1, donc

$$\begin{aligned} K_{1pm}(t) &= E(x \mapsto (x-t)_+) \\ &= \int_{-1}^{1} (x-t)_+ \mathrm{d}x - (1-(-1))(0-t)_+ \\ &= \int_{t}^{1} (x-t)\mathrm{d}x - 2(-t)_+ \\ &= [\frac{(x-t)^2}{2}]_t^1 - 2t_- \\ &= \frac{(1-t)^2}{2} - 2t_- \\ &= \begin{cases} \dfrac{(1-t)^2}{2} \text{ si } t \geq 0 \\ \dfrac{(1-t)^2}{2} + 2t \text{ si } t < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$g'(x) = e^x + xe^x$, $g^{(2)}(x) = 2e^x + xe^x$ et $g^{(3)}(x) = 3e^x + xe^x > 0$ sur [-1,1] d'où

$\max_{x\in[-1,1]} g^{(2)}(x) = g^{(2)}(1) = e$. En utilisant la formule de la moyenne :

$$\begin{aligned}
E(g) &= \int_{-1}^{1} K_{1pm}(t) g^{(2)}(t)\mathrm{d}t \\
&= g^{(2)}(\xi) \int_{-1}^{1} K_{1pm}(t)\mathrm{d}t \\
&= g^{(2)}(\xi) \left(\int_{-1}^{0} (\frac{(1-t)^2}{2} + 2t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} \frac{(1-t)^2}{2}\mathrm{d}t \right) \\
&= g^{(2)}(\xi) \left(\int_{-1}^{0} \frac{(1+t)^2}{2}\mathrm{d}t + \left[-\frac{(1-t)^3}{6} \right]_0^1 \right) \\
&= g^{(2)}(\xi) \left(\left[\frac{(1+t)^3}{6} \right]_{-1}^{0} + 1/6 \right) \\
&= g^{(2)}(\xi)/3 \\
&\leq (e + 1/e)/3.
\end{aligned}$$

Méthode composées. L'idée est de subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en plusieurs intervalles de même longueur (appelé le *pas*) et d'appliquer une méthode de quadrature sur chacun des intervalles.

Exercice 6

On considère l'intégrale

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$

1. Évaluer mumériquement cette intégrale par la méthode des trapèzes pour le pas $h = 1/3$.

Avec $h = 1/3)$,

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int_1^{4/3} \frac{1}{x}\mathrm{d}x + \int_{4/3}^{5/3} \frac{1}{x}\mathrm{d}x + \int_{5/3}^{1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$

$T(f) = (b-a)(f(a)/2 + f(b)/2)$ ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x &= \int_1^{4/3} \frac{1}{x}\mathrm{d}x + \int_{4/3}^{5/3} \frac{1}{x}\mathrm{d}x + \int_{5/3}^{1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\
&\approx 1/3 \left(\frac{1}{2}(1/1) + \frac{1}{2}(\frac{1}{4/3}) \right) + 1/3 \left(\frac{1}{2}(\frac{1}{4/3}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{5/3}) \right) + \\
&1/3 \left(\frac{1}{2}(\frac{1}{5/3}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}) \right) \\
&= 0,7
\end{aligned}$$

2. Calculer la valeur exacte de I.

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x &= [\ln x]_1^2 \\ &= \ln 2 \\ &\approx 0,69314718056\end{aligned}$$

3. Expliquer pourquoi la valeur numérique obtenue est supérieure à $\ln(2)$.

La fonction $x \mapsto 1/x$ est convexe, donc la fonction est toujours inférieure ou égale à son approximation affine. Puisque l'approximation n'est pas exacte, la valeur estimée avec des approximations affines est supérieur à la vraie valeur.

4. Est-ce vrai pour tout pas h ?

L'approximation sera toujours supérieure à la vraie valeur mais on aura $\lim_{h\to 0}$ approximation (h) $=$ vraie valeur.