Feuille 3

Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$. Une méthode d'intégration est dite d'ordre n si elle donne la valeur exacte de l'intégrale pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à n.

Rappel de la méthode d'intégration Newton-Cotes :

$$\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

On considère le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux point $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$:

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(X). \tag{1}$$

Une valeur approché de l'intégrale de f est donc :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \approx \int_a^b P(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b l_i(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i). \tag{2}$$

Donc $(b-a)\omega_i = \lambda_i = \int_a^b l_i(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 1

Montrer que l'application

$$\begin{aligned} E \quad : \quad & \mathcal{C}([\alpha, \beta]) \mapsto \mathbb{R} \\ & f \mapsto \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{l} \lambda_k f(x_k) \end{aligned}$$

est une forme linéaire.

Exercice 2

1. Montrer que les ω_i ne dépendent pas de $[a, b]$.
2. Méthode du rectangle et du point milieu. Il s'agit d'interpoler la fonction f en un seul point x_0. Montrer que les méthodes du rectangle sont d'ordre 0 et la méthode du point milieu est d'ordre 1.
3. Méthode du trapèze. Il s'agit d'interpoler f aux deux points $x_0 = a$ et $x_1 = b$. Déterminer l'ordre de cette méthode.
4. Montrer que pour une méthode d'ordre 0 où plus, $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$.
5. Montrer que $\omega_i = \omega_{n-i}$.

6. Méthode de Simpson. Il s'agit d'interpoler la fonction f aux points $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ et $x_2 = b$. Déterminer la valeur approchée de $\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t$ obtenue avec cette méthode. Montrer que la méthode de Simpson est d'ordre 3.

Exercice 3

Soient $(x_1, x_2) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$. et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. On note $T(f) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$.

1. Quelle conditions doivent vérifier x_1, x_2, λ_1 et λ_2 pour que T soit une méthode d'intégration
   (a) d'ordre au moins 0 ?
   (b) d'ordre au moins 1 (en supposant $\lambda_i \neq 0$) ?
   (c) d'ordre au moins 2 (en supposant $0 < \lambda_i < 2$) ?
2. Montrer que si la méthode est d'ordre au moins 2 et $x_1 = -x_2$, alors elle est de l'ordre 3 (on l'appelle la méthode de Gauss).

Estimation de l'erreur. On suppose que la méthode utilisée est d'ordre $N \geq 0$. On note $T(f)$ la valeur approchée de $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. Si f est de classe $C^{N+1}([a, b] \mapsto \mathbb{R})$, alors l'erreur d'approximation est donnée par

$$E(f) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - T(f) = \frac{1}{N} \int_a^b K_N(t) f^{(N+1)}(t)\mathrm{d}t. \tag{3}$$

où K_N est la fonction $t \mapsto E(x \mapsto (x-t)_+^N)$ (appelée noyau de Peano).

Exercice 4

Soit

$$\begin{array}{rcl} g : [-1, 1] & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^x. \end{array}$$

1. Donner une valeur approchée de $\int_{-1}^{1} g(t)\mathrm{d}t$ pour les méthodes du point milieu et du trapèze.
2. Calculer le noyau de Peano pour la méthode du point milieu, et en déduire une expression de l'erreur commise.

Méthode composées. L'idée est de subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en plusieurs intervalles de même longueur (appelé le *pas*) et d'appliquer une méthode de quadrature sur chacun des intervalles.

Exercice 5

On considère l'intégrale

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$

1. Évaluer mumériquement cette intégrale par la méthode des trapèzes pour le pas $h = 1/3$.
2. Calculer la valeur exacte de I.
3. Expliquer pourquoi la valeur numérique obtenue est supérieure à $\ln(2)$.
4. Est-ce vrai pour tout pas h ?