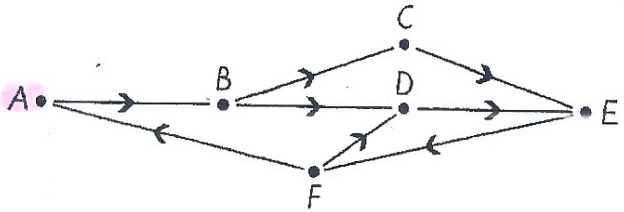
CHAP. II – THEORIE DES GRAPHES

Plan du chapitre

DOCUMENT 1 : DEFINITIONS ET REPRESENTATIONS

- Un graphe est un ensemble fini de points
- Les sommets sont reliés par des flèches appelées arcs



Vocabulaire :

- le point A est l'origine de l'arc $\overrightarrow{AB}$; il est aussi le précédent de B.
- le point B est l'extrémité de l'arc (A,B); il est aussi le suivant de A.
- un chemin est succession d'arcs avec l'extrémité de chaque arc qui coïncide avec l'origine du suivant

A,B,D,E

- un circuit est un chemin fini tel que l'origine du premier arc coïncide avec l'extrémité du dernier

A, B, D, E, F, A

Il existe différentes façons de donner un graphe :

- faire le dessin comme ci-dessus, appelé représentat° sagittale
- donner l'ensemble de tous les arcs : G = {(A, B), (B, C), (C, E), (E,F), (F, D), (C, E), (B,D) (D,E)}
- indiquer dans un tableau tous les suivants de chaque sommet : c'est **le dictionnaire des suivants**

Sommets	Suivants
A	B
B	C ; D
C	E
D	E
E	F
F	A ; D

- indiquer dans un tableau tous les précédents de chaque sommet : c'est **le dictionnaire des précédents**

Sommets	Précédents
A	F
B	A
C	B
D	B , F
E	C , D
F	E

- donner **la matrice booléenne** du graphe

Extrémités / Origine	A	B	C	D	E	F
A	0	1	0	0	0	0
B	0	0	1	1	0	0
C	0	0	0	0	1	0
D	0	0	0	0	1	0
E	0	0	0	0	0	1
F	1	0	0	1	0	0

On note 1 lorsque l'arc considéré est dans le graphe, 0 sinon.

Exemple :

Déterminer les dictionnaires du graphe ayant la matrice booléenne suivante puis en donner une représentation sagittale.

Extrémités / Origine	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	1	0	0	1
X_2	0	1	1	0
X_3	0	0	0	1
X_4	0	0	0	0

DOCUMENT 2 : NIVEAU DANS UN GRAPHE SANS CIRCUIT

Ordonnancer par niveaux le graphe G suivant, puis en donner une représentation sagittale.

Sommets	Précédents
B	-
D	M, B
F	B
G	M, P
H	D, B, Q
J	F, H
M	-
P	M
Q	B
R	P, G, D, H, J

Méthodologie :

1. Identifier les sommets précédents à affecter au Niveau 0 (B et M)

2. Reprendre le dictionnaire en supprimant dans les deux colonnes les sommets de niveau 0.

Tous les sommets sans précédent = Niveau 1

Soit ici

Sommets	Précédents
D	—
F	—
G	P
H	D; Q
J	F; H
P	—
Q	—
R	P; G; D; H; J

3. Idem que précédemment pour déterminer le niveau 2

Sommets	Précédents
G	—
H	—
J	H
R	G; H; J

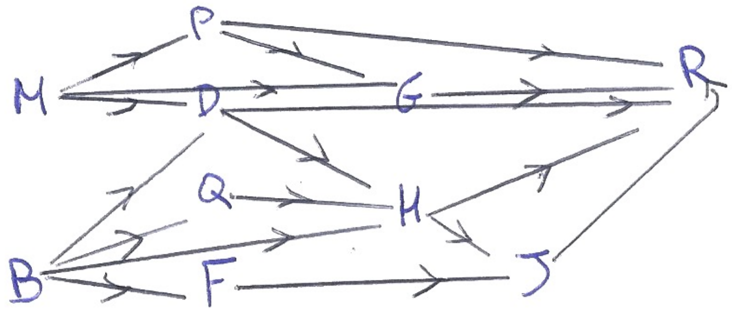
4. Idem que précédemment pour déterminer le niveau 3

Sommets	Précédents
J	—
R	J

5. Idem que précédemment pour déterminer le niveau 4

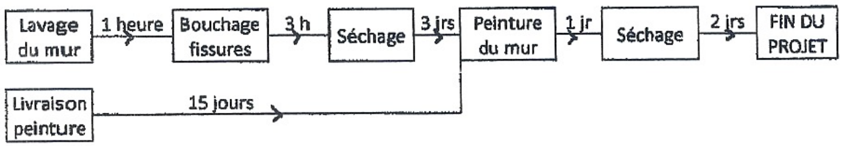
Sommets	Précédents
R	—

Pour tracer la représentation sagittale, placer les sommets de gauche à droite par niveaux croissants, puis indiquer les arcs du graphe en utilisant le dictionnaire des précédents.



DOCUMENT 3 : LONGUEUR D'UN ARC ET D'UN CHEMIN

Exemple : Un particulier vient d'acheter du matériel pour ravaler les murs de son pavillon. N'ayant pas trouvé la peinture de son choix, il l'a commandée. Les tâches à effectuer et les durées à respecter sont indiquées sur le graphe ci-dessous. Dans combien de temps, au plus tôt, aura-t-il rénové son mur ?



Vocabulaire :

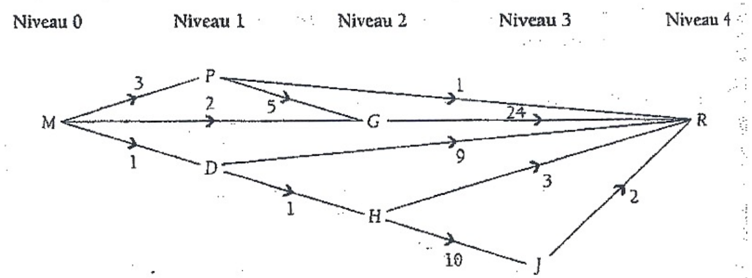
- un graphe G sans circuit étant donné, on suppose que chaque arc est affecté d'un nb appelé longueur de l'arc.
- la **longueur d'un chemin** est la S⊕ des longueurs des arcs composant ce chemin.

Le temps mini de réal° du projet est donné par le chemin le ⊕ long entre le début & la fin du projet

DOCUMENT 4 : CHEMIN LE PLUS LONG DANS UN GRAPHE SANS CIRCUIT

Il faut d'abord ordonnancer le graph par niveaux afin de vérifier quel est son circuit

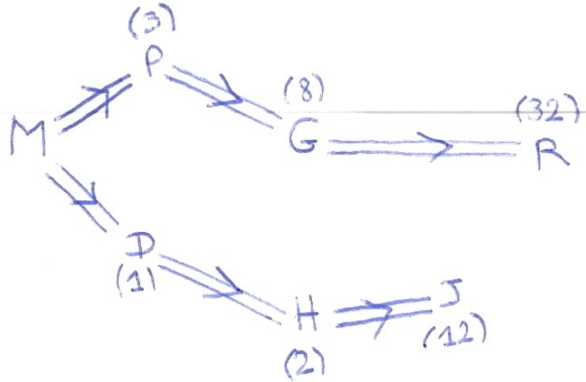
Exemple : l'objectif est de chercher le chemin le plus long entre M et R



1ère méthode (utilisable que si cas simple) :

Chemin	Longueur
MPR	3 + 1 = 4
MPGR	3 + 5 + 24 = 32
MGR	2 + 24 = 26
MDR	1 + 9 = 10
MDHR	1 + 1 + 3 = 5
MDHJR	1 + 1 + 10 + 2 = 14

2ème méthode : déterminer, pour chaque sommet, la longueur du chemin le plus long entre M et le sommet considéré ; noter sous le sommet la longueur obtenue et indiquer en double trait l'arc permettant d'obtenir cette longueur (permet à la fin de trouver facilement le chemin le plus long).



donc MPGR est le chemin le ⊕ long.

faire la m̄ pour le chemin le ⊕ court.

DOCUMENT 5 : LES FLOTS, VOCABULAIRE DE BASE

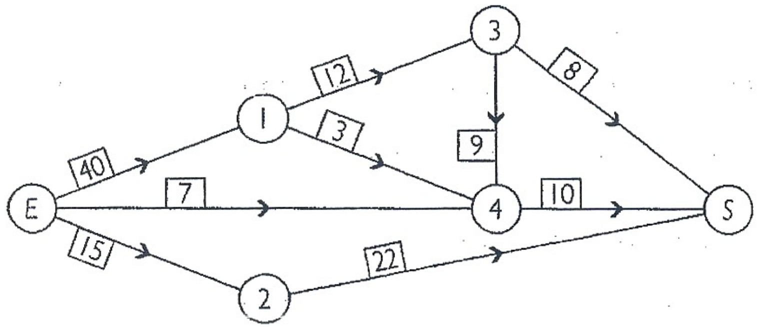
Etude ici d'un graphe sans circuit ayant

- **une entrée** (E) = un sommet ∅ précédent
- **une sortie** (S) = un sommet ∅ suivant

Un tel graphe est appelé réseau et les autres sommets sont appelés noeuds du réseau.

La capacité d'un arc est la Q maxi qui peut transiter de son origine à son extrémité par unité de temps

Exemple : le graphe suivant représente des canalisations permettant une circulation d'eau du point E au point S, en passant par les nœuds ①,②,③ et ④ :



Sur chaque arc est indiquée sa capacité, exprimée en litres par seconde.

- **Le flot sur un arc** est la Q qui transite réellement de l'origine à l'extrémité de cet arc par unité de temps
- **Le flot du réseau** est la S⊕ des flots partant de (E)

Il faut évidemment sur chaque arc que flot ≤ à capacité

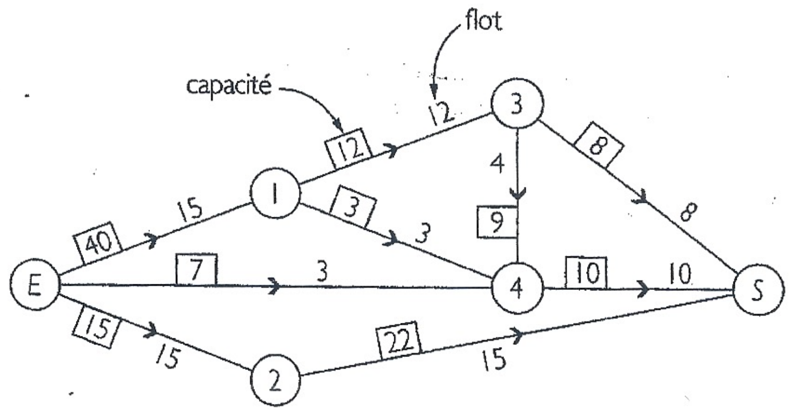
La différence « capacité – flot » est appelée capacité résiduelle de l'arc.

Un arc est **saturé** si sa capacité résiduelle = 0.

Nous supposerons **la conservation du flot**, i.e :

- la S⊕ des flots partant de E = S⊕ des flots arrivant sur (S)
- en chaque noeud, la S⊕ des flots entrant = S⊕ des flots sortant

Exemple : Vérifier que les flots indiqués sur le réseau suivant respectent les capacités et la conservation du flot.



DOCUMENT 6 : L'ALGORITHME DE FORD FULKERSON objectif : déter. flot max qui est possible de faire transiter de (E) à (S) en respectant les capacités & la conservat° du flot.

On dispose de

- 15 tonnes d'une marchandise dans un dépôt A
- 6 tonnes de la même marchandise dans un dépôt B

Des camions doivent transporter ces marchandises en trois lieux X, Y et Z.

Les liaisons existant entre les dépôts et les destinations, ainsi que les quantités maximales qui peuvent transiter sur chacune d'elles, sont données (en tonnes) dans le tableau suivant :

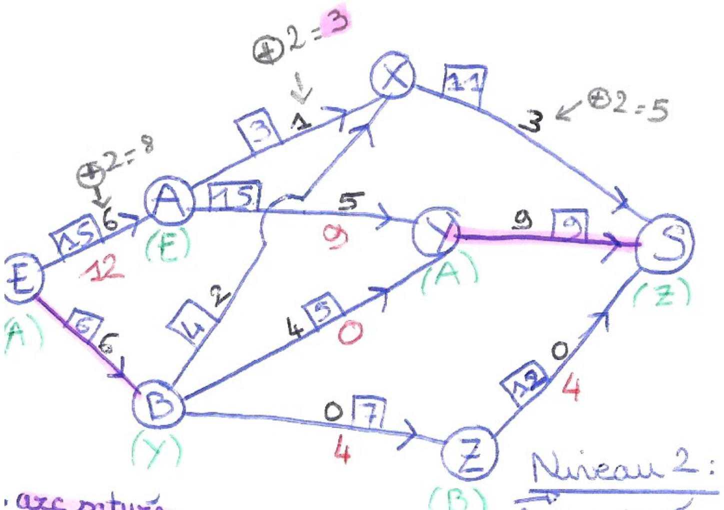
	X	Y	Z
A	3	15	0
B	4	5	7

Par ailleurs, X peut recevoir au maximum 11 tonnes, Y 9 tonnes et Z 12 tonnes.

Déterminer la quantité maximale de marchandise qui peut être livrée.

3 étapes : • choisir un flot réel respectant les capacités & la conservat° du flot.
• rechercher un flot "complet"
• déterminer flot maxi.

voir verso



- arc saturé
- $\boxed{6}$ capacité
- 6 flot

1) choix d'un flot réel : on choisi généralement la + petite capacité des arcs ici, 6.

Q = 12 tonnes

2) Recherche d'un flot complet : il est complet lorsque tous les chemins de E à S sont saturés.
Un chemin de E à S est saturé lorsque au − un des arcs de ce chemin est saturé

↳ EBZS est saturé car $\vec{EB}$ est saturé

Pour obtenir un flot complet, on sature tous les chemins qui ne le sont pas

3) Pour trouver un flot maxi, il faut que toutes les chaînes de E à S soient saturées
On appelle chaîne une suite de sommets telle que deux sommets consécutifs soient orientés dans un sens ou dans un autre
Une chaîne est non saturée si aucun arc → n'est saturé & si sur arc ← flot ≠ 0.

Niveau 2 :
$\vec{AX}$ saturé
$\vec{AY}$ ∅ saturé & $\overleftarrow{YA} \neq 0$
⇒ noter A près de Y

Niveau 3 : Y est marqué ⇒ voir ses suivants & précédents
$\vec{YS}$ saturé, B est un précédent avec $\overleftarrow{YB} \neq 0$ (A est aussi un précédent mais déjà marqué)
⇒ noter Y près de B

Niveau 4 : $\vec{BZ}$ ∅ saturé ⇒ noter B près de Z

Niveau 5 : $\vec{ZS}$ ∅ saturé, noter Z près de S

a) Rechercher des chaînes non saturée & $\overleftarrow{AE} \neq 0$

Niveau 1 : l'arc $\vec{EA}$ n'est pas saturé ; noter (A) près de E, A étant un sommet noté, voir ses suivants & ses précédents

Conclusion a) : chaîne $\vec{E}\vec{A}\vec{Y}\overleftarrow{B}\vec{Z}\vec{S}$ ∅ saturée (tous les sommets notés)

b) Améliorat° du flot / chaîne ∅ saturée : • rechercher la capacité résiduelle mini sur arcs →

$C_1 = \min(7, 10, 7, 12) = 7$
sur $\vec{EA}$ $\vec{AY}$ $\vec{BZ}$ $\vec{ZS}$

Etape 3, b) • Recherche du flot mini sur les arcs ←

$C_2 = \min(4) = 4$

$\downarrow$

$\overleftarrow{YB}$

• $C = \min(C_1, C_2)$

$= \min(7, 4)$

$= 4$

En ajoutant C à tous les arcs → de la chaîne & en soustrayant C à tous les arcs ← de la chaîne on ↑ le flot du réseau tout en conservant les capacités & la conservat° du flot.

⇒ Ajout de 4 à $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{AY}$, $\overrightarrow{BZ}$; soustrait de 4 à $\overleftarrow{YB}$.

⇒ nb de tonnes = 12 + 6 = 18 T.

HIERARCHIE D'UN CHANTIER

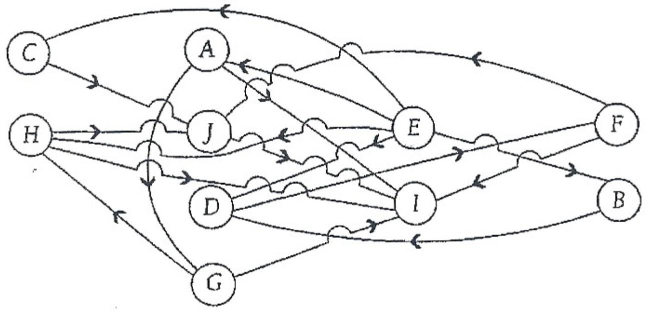
Théorie des graphes : notions de base

Dix personnes, notées A, B, C, D, E, F, G, H, I et J travaillent ensemble sur un chantier.

Pour des raisons de sécurité, et en fonction des compétences et des missions de chacun, les relations hiérarchiques entre ces 10 personnes ont été clairement définies.

La représentation sagittale donnée ci-dessous indique, pour chaque personne, à qui elle peut donner des ordres. Les différents ordres qui peuvent être donnés à une même personne sont de nature telle qu'ils ne risquent pas d'être contradictoires.

L'arc X ——→—— Y signifie que X peut donner des ordres à Y.



Votre travail :

1) Donner la matrice booléenne correspondant à cette représentation.
2) Donner le dictionnaire des précédents et une représentation ordonnancée par niveaux de ce graphe.

   Quel est l'intérêt de cette représentation ?

   Parmi ces 10 personnes, quelle est celle qui a le plus haute position hiérarchique ?
3) Le chef de travaux a constaté que, très curieusement, un ordre était d'autant mieux exécuté qu'il était passé par le plus grand nombre d'intermédiaires. On cherche donc, pour chaque personne X, le chemin le plus long allant de E à X.

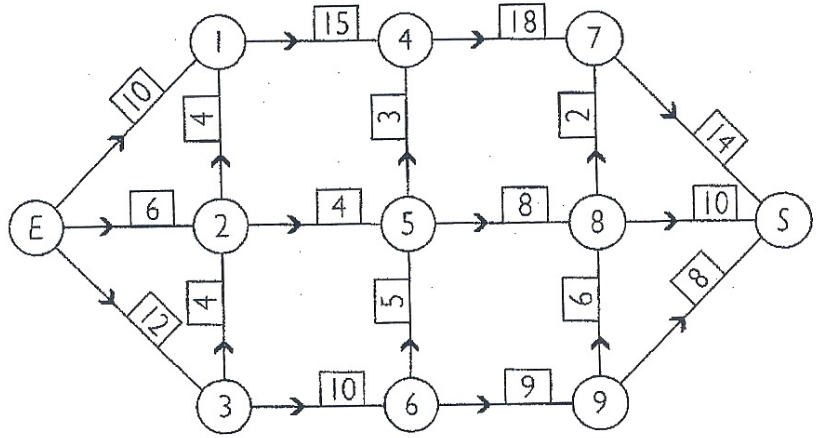
   Compléter le tableau suivant et comparer les deux dernières colonnes.

Sommet X (personne)	Chemin le plus long de E à X	Longueur du chemin le plus long de E à X	Niveau du sommet X
A			
...			
J			

PROBLEME DE CIRCULATION

Algorithme de Ford Fulkerson

On étudie un problème de circulation à sens unique entre deux points E et S, représenté par le réseau suivant. Sur chaque arc est indiqué la capacité maximale.



Votre travail :

Déterminer le flot maximal qui peut circuler de E à S en respectant les capacités et les principes de conservation du flot : la somme des flots sortant de E doit être égale à la somme des flots arrivant sur S et, pour chaque nœud du réseau, la somme des flots entrants doit être égale à la somme des flots sortants.