Structures algébriques (groupes)
Corrigé de l'examen partiel

Le barème est sur 21,5.

I - Exemples (5 points)

Justifier en une ou deux phrases chacune des réponses :

1. Donner la liste des éléments d'ordre 4 dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ des complexes non nuls.

   SOLUTION. (**1 point**)
   i et $-i$ sont les éléments d'ordre 4 dans $\mathbb{C}^*$. Les deux autres racines 4èmes de l'unité, qui sont -1 et $+1$, sont d'ordre 2 et 1 respectivement.

2. Donner un exemple de polygone P tel que le groupe $\mathrm{Isom}(P)$ des isométries du plan préservant P soit d'ordre 4.

   SOLUTION. (**1 point**)
   On peut prendre P un rectangle (non carré !), ou encore un losange (non carré également). Dans le cas d'un rectangle, le groupe $\mathrm{Isom}(P)$ contient l'identité, la symétrie centrale et les deux symétries axiales pour les deux droites passant par les milieux de côtés opposés (un dessin était bienvenu !).

3. Donner un exemple d'élément d'ordre 4 dans le groupe alterné A_8.

   SOLUTION. (**1 point**)
   La permutation $\sigma = (1234)(5678)$ est d'ordre 4, et de signature +1, car se factorise à l'aide de six transpositions : $\sigma = (12)(23)(34)(56)(67)(78)$.

   NB: La permutation $(1234)(56)$ convenait aussi.

4. Donner (sans faire la liste des images !) un isomorphisme entre le groupe $\mathrm{Isom}(T)$ des isométries du plan préservant un triangle équilatéral et le groupe symétrique S_3.

   SOLUTION. (**1 point**)
   En numérotant p_1, p_2, p_3 les sommets du triangle, et en posant

$$\begin{aligned} \phi\colon\ \mathrm{Isom}(T) &\to S_3 \\ f &\mapsto \sigma \end{aligned}$$

   tel que $f(p_i) = p_{\sigma(i)}$, on obtient l'isomorphisme attendu.

5. Donner un exemple de groupe contenant à la fois des éléments d'ordre infini et des éléments d'ordre fini en plus du neutre.

   SOLUTION. (**1 point**)
   Le groupe $S^1 \subset \mathbb{C}^*$ *des complexes de module 1, pour la multiplication, convient : un élément* $e^{i\theta}$ *est d'ordre fini si et seulement si* $\theta = 2\pi\alpha$ *avec* $\alpha \in \mathbb{Q}$.

   Un autre exemple est donné par le produit direct de S_3 *avec* $\mathbb{Z}$ *: un élément* $(\sigma, n) \in S_3 \times \mathbb{Z}$ *est d'ordre fini ssi* $n = 0$.

II - Groupe symétrique (5 points)

Notons σ la permutation suivante de $\{1, \ldots, 9\}$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 9 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Écrire la décomposition canonique en cycles de σ.

   SOLUTION. (**1 point**)
   $\sigma = (1\,7\,4\,8)(2\,6)(3\,5\,9)$

2. Calculer l'ordre de σ, en citant le résultat du cours utilisé.

   SOLUTION. (**1 point**)
   L'ordre d'une permutation est le PPCM des longueur des cycles apparaissant dans sa décomposition canonique. Ici l'ordre de σ *est donc 12, PPCM de 4,2 et 3.*

3. Calculer la signature de σ.

   SOLUTION. (**1 point**)
   $\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(1\,7\,4\,8)\,\mathrm{sgn}(2\,6)\,\mathrm{sgn}(3\,5\,9) = (-1)^{4-1} \cdot (-1)^{2-1} \cdot (-1)^{3-1} = 1.$

4. Trouver, si c'est possible, une permutation $\omega \in S_9$ telle que

   $$\omega\sigma\omega^{-1} = (1\,2)(3\,4\,5)(6\,7\,8\,9).$$

   SOLUTION. (**1 point**)
   C'est possible car les longueur des cycles coïncident, et en écrivant $\sigma = (2\,6)(3\,5\,9)(1\,7\,4\,8)$ *on obtient* $\omega = (1\,6\,2)(4\,8\,9\,5)$ *(parmi beaucoup de choix possibles).*

5. Calculer σ^{2016}.

   SOLUTION. (**1 point**)
   Comme on a vu que σ *est d'ordre 12 il s'agit de trouver le reste de la division de 2016 par 12. Mais 2016 est divisble par 4 (c'est 4 fois 504), et aussi par 3 (constater que la somme des chiffres est un multiple de 3, ou poser la division), donc 2016 est un multiple de 12, et* $\sigma^{2016} = id$.

TSVP ⇒

III - Groupes commutatifs (6,5 points)

1. Soient x et y deux éléments d'ordres finis, premiers entre eux, d'un groupe commutatif G. Montrer que l'ordre de xy est égal au produit des ordres de x et y.

   Solution. (**1,5 points**)
   Notons a l'ordre de x, b l'ordre de y, et c l'ordre de xy. On veut montrer $c = ab$.

   D'une part on a $(xy)^{ab} = x^{ab}y^{ab} = (x^a)^b(y^b)^a = 1$, donc ab est un multiple de c.

   D'autre part $1 = (xy)^c = x^c y^c$, donc x^c et y^c sont de même ordre, et par Lagrange cet ordre divise respectivement a et b qui sont premier entre eux. Donc x^c et y^c sont d'ordre 1, c'est-à-dire sont égaux au neutre $1 \in G$, donc c est un multiple à la fois de a et de b, et comme ils sont premiers entre eux, du produit ab.

   Conclusion : $c = ab$, comme attendu.

2. Soit y un élément d'un groupe G d'ordre $p^\alpha m$ où m est un entier et p est premier. Montrer que y^m est d'ordre p^α.

   Solution. (**1 point**)
   On a $(y^m)^{p^\alpha} = y^{p^\alpha m} = 1$, et d'autre part si $q < p^\alpha$ on a $(y^m)^q = y^{mq} \neq 1$ par définition de l'ordre de y. Ainsi p^α est bien le plus petit entier ≥ 1 tel que $(y^m)^{p^\alpha} = 1$.

   NB: la question n'était pas très bien formulée, car il n'était pas immédiatement clair si c'était y ou le groupe entier G qui était supposé d'ordre $p^\alpha m$ (c'était y bien sûr, comme la plupart l'ont de suite compris). Mea culpa.

3. Soit G un groupe commutatif fini. Montrer que si $x, y \in G$ sont d'ordre respectif a, b, alors il existe un élément dans G dont l'ordre est $\mathrm{PPCM}(a, b)$.

   Solution. (**1 point**)
   Montrons que si $x, y \in G$ sont d'ordre respectif a, b, il existe un élément dans G d'ordre $\mathrm{PPCM}(a, b)$. On note d le PGCD de a et b, et $a = da'$, $b = db'$, donc $\mathrm{PPCM}(a, b) = da'b'$. Par la question 2 on a $\mathrm{ordre}(x^d) = a'$, et par la question 1 $\mathrm{ordre}(x^d y) = a'b = \mathrm{PPCM}(a, b)$.

4. En déduire qu'il existe un élément de G dont l'ordre est le ppcm des ordres des éléments de G.

   Solution. (**1 point**)
   Si z réalise le maximum des ordres parmi les éléments de G, la question précédente permet de conclure que l'ordre de z est un multiple de l'ordre de

tout élément de G, et en particulier l'ordre de z est le PPCM *des ordres des éléments de G.*

NB: on pouvait aussi procéder de manière itérative, mais c'était un peu plus pénible à rédiger...

5. Calculer l'ordre de chaque élément du groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le résultat de la question 4 est-il vérifié ?

   Solution. (**1 point**)
   On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{ordre}(\bar{0}, \hat{0}) &= 1 \\
\mathrm{ordre}(\bar{1}, \hat{0}) &= 3 \\
\mathrm{ordre}(\bar{2}, \hat{0}) &= 3 \\
\mathrm{ordre}(\bar{0}, \hat{1}) &= 2 \\
\mathrm{ordre}(\bar{1}, \hat{1}) &= 6 \\
\mathrm{ordre}(\bar{2}, \hat{1}) &= 6
\end{aligned}$$

   Et 6 qui est le PPCM *des ordres, est bien réalisé.*

6. Calculer l'ordre de chaque élément du groupe symétrique S_3. Le résultat de la question 4 est-il vérifié ?

   Solution. (**1 point**)
   On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{ordre}(id) &= 1 \\
\mathrm{ordre}(12) = \mathrm{ordre}(13) = \mathrm{ordre}(23) &= 2 \\
\mathrm{ordre}(123) = \mathrm{ordre}(132) &= 3
\end{aligned}$$

   On voit que le PPCM des ordres, qui est 6, n'est pas réalisé : ce n'est pas contradictoire car S_3 n'est pas commutatif.

IV - Quizz (5 points).

Répondre par vrai ou faux en donnant suivant les cas un court argument (trois lignes grand maximum) ou un contre-exemple (réponse non justifiée = 0 point !).

1. Le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est un exemple de groupe fini, commutatif et non cyclique : vrai ou faux ?

   Solution. (**1 point**)
   Faux, il est cyclique, engendré par exemple par $(\bar{1}, \hat{1})$, comme on l'a constaté dans la question 5 de l'exercice III.

2. Tout sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (où $n \geq 2$) est cyclique : vrai ou faux ?

   Solution. (**1 point**)
   Vrai, un sous groupe H de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est engendré par $\bar{a}$, où a est le plus petit entier entre 1 et n tel que $\bar{a} \in H$.

3. Il existe deux groupes d'ordre 5 non isomorphes : vrai ou faux ?

   Solution. (**1 point**)
   Faux, par le théorème de Lagrange tout sous-groupe d'ordre 5 contient des éléments d'ordre 5, donc est cyclique et $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est donc le seul groupe d'ordre 5 à isomorphisme près.

4. Il existe une action sans point fixe d'un groupe d'ordre 15 sur un ensemble de cardinal 7 : vrai ou faux ?

   Solution. (**1 point**)
   Faux. Le cardinal des orbites divise 15 et est au plus 7 : les possibilités sont $1, 3, 5$. Or 7 ne s'écrit pas comme une somme n'utilisant que des 3 et des 5, donc il y a des orbites de cardinal 1, autrement dit des points fixes.

5. Il existe 5 éléments d'ordre 2 dans le groupe $\mathrm{Isom}(C)$ des isométries du plan préservant un carré C : vrai ou faux ?

   Solution. (**1 point**)
   C'est vrai : il y a la symétrie centrale (que l'on peut voir aussi comme une rotation d'angle π), les deux symétries axiales par rapport aux diagonales, et les deux symétries axiales par rapport aux droites passant par des milieux de côtés opposés.