Algèbre 6 (théorie des groupes)
Examen partiel avec corrigé

Durée: 2 heures

I - Quizz (6 points).

Répondre par vrai ou faux en donnant suivant les cas un court argument, ou un contre-exemple. Trois lignes devraient suffire à chaque fois, mais attention, réponse correcte mais non justifiée = 0 point !

1. Le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est un exemple de groupe fini, commutatif et non cyclique : vrai ou faux ?

   Solution. (**1 point**)
   Faux, il est cyclique, engendré par exemple par $(\bar{1}, \hat{1})$: c'est un cas particulier du théorème des restes chinois.

2. Il existe deux groupes d'ordre 4 non isomorphes : vrai ou faux ?

   Solution. (**1 point**)
   Vrai, les groupes $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont tous deux d'ordre 4 mais non isomorphes. En effet $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est non cyclique car contient seulement des éléments d'ordre 2 à part le neutre.

3. Il existe exactement quatre éléments d'ordre 2 dans le groupe $\mathrm{Isom}(R)$ des isométries du plan préservant un rectangle (non carré) R : vrai ou faux ?

   Solution. (**1 point**)
   C'est faux : il n'y en que trois, qui sont la symétrie centrale (que l'on peut voir aussi comme une rotation d'angle π), et les deux symétries axiales par rapport aux droites passant par des milieux de côtés opposés. Le dernier élément du groupe est id *qui est d'ordre 1.*

4. Tous les sous-groupes du groupe symétrique S_3 sont distingués : vrai ou faux ?
   Solution. (**1 point**)

   C'est faux : le sous-groupe $H = \{id, (12)\}$ n'est pas distingué. Par exemple $(13) \circ (12) \circ (13)^{-1} = (32)$ qui n'est pas dans H.

5. Tout groupe G dont tous les éléments (à part le neutre) sont d'ordre 2 est abélien : vrai ou faux ? Solution. (**1 point**)

   C'est vrai : Si $a, b \in G$, on a $a = a^{-1}, b = b^{-1}$ et $ab = (ab)^{-1}$, d'où $ab = b^{-1}a^{-1} = ba$.

6. Le groupe symétrique S_{10} contient au moins un élément d'ordre 30 : vrai ou faux ? Solution. (**1 point**)

   C'est vrai : $(1\,2)(3\,4\,5)(6\,7\,8\,9\,10)$ *convient, car* $30 = PPCM(2,3,5)$.

II - Groupe symétrique (6 points)

Notons σ la permutation suivante de $\{1,\ldots,7\}$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 1 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Écrire la décomposition canonique en cycles de σ.

   Solution. (**1 point**)
   $\sigma = (1\,3)(7\,4\,2)$

2. Calculer la signature de σ.

   Solution. (**1 point**)
   $\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(1\,3)\,\mathrm{sgn}(7\,4\,2) = (-1)\cdot(+1) = -1$.

3. Calculer σ^{2019}.

   Solution. (**1 point**)
   L'ordre d'une permutation est le PPCM des longueur des cycles apparaissant dans sa décomposition canonique. Ici l'ordre de σ est donc 6, PPCM de 2 et 3.

   Comme on a vu que σ est d'ordre 6 il s'agit de trouver le reste de la division de 2019 par 6. On constate que 2016 est divisible par 2, et aussi par 3 (constater que la somme des chiffres est un multiple de 3, ou poser la division), donc 2016 est un multiple de 6, et

   $$\sigma^{2019} = \sigma^{2016}\sigma^3 = \sigma^3 = (1\,3)^3(7\,4\,2)^3 = (1\,3).$$

4. Calculer le cardinal de la classe de conjugaison de σ dans S_7.

   Solution. (**1.5 points**)
   Il s'agit de trouver le nombre de permutations de type $(2,3)$ dans S_7:

   - *Nombre de choix pour la transposition :* $\frac{7\cdot 6}{2} = 21$.
   - *Nombre de choix pour le 3-cycle avec les 5 chiffres restant :* $\frac{5\cdot 4\cdot 3}{6}\cdot 2 = 20$.
   - *Donc au total : 420 éléments dans la classe de conjugaison de σ.*

5. Trouver, si c'est possible, une permutation $\omega \in S_7$ telle que
$$\omega\sigma\omega^{-1} = (1\,2)(3\,4\,5).$$

   SOLUTION. (**1.5 points**)
   C'est possible car les longueurs des cycles coïncident (autrement dit les types sont les mêmes), et en écrivant $\sigma = (1\,3)(7\,4\,2)$ *on obtient les conditions suffisantes* $\omega(1) = 1$, $\omega(3) = 2$, $\omega(7) = 3$, $\omega(4) = 4$ *et* $\omega(2) = 5$. *Ainsi par exemple* $\omega = (7\,3\,2\,5)$ *convient (parmi beaucoup de choix possibles).*

III - Groupes et éléments d'ordre 6 (9 points)

1. Donner (sans faire la liste des images !) un isomorphisme entre le groupe $\mathrm{Isom}(T)$ des isométries du plan préservant un triangle équilatéral et le groupe symétrique S_3.

   SOLUTION. (**1 point**)
   En numérotant p_1, p_2, p_3 *les sommets du triangle, et en posant*
$$\begin{aligned}\phi\colon\ \mathrm{Isom}(T) &\to S_3\\ f\quad &\mapsto \sigma\end{aligned}$$
   où σ *est la permutation définie par* $f(p_i) = p_{\sigma(i)}$, *on obtient l'isomorphisme attendu.*

2. Donner la liste des éléments d'ordre 6 dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ des complexes non nuls.

   SOLUTION. (**1 point**)
   $e^{2i\pi/6}$ *et* $e^{-2i\pi/6}$ *sont les éléments d'ordre 6 dans* $\mathbb{C}^*$. *Les autres racines 6èmes de l'unité, qui sont* $+1$ *(ordre 1),* -1 *(ordre 2),* $e^{2i\pi/3}$ *et* $e^{-2i\pi/3}$ *(ordre 3) ne sont pas d'ordre 6.*

3. Calculer l'ordre de $\bar{2}$ et de $\bar{3}$ dans le groupe multiplicatif $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*, \cdot)$, puis expliciter un isomorphisme du groupe additif $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ vers le groupe multiplicatif $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*, \cdot)$.

   SOLUTION. (**1.5 points**)
   On a $\bar{2}^2 = \bar{4}$ *et* $\bar{2}^3 = \bar{8} = \bar{1}$ *donc* $\bar{2}$ *est d'ordre 3.*

   On calcule de façon similaire $\bar{3}^2 = \bar{9} = \bar{2}$ *et* $\bar{3}^3 = \bar{6}$, *ainsi* $\bar{3}$ *est d'ordre* > 3, *et par Lagrange on en déduit que* $\bar{3}$ *est d'ordre 6.*

   Ainsi $\bar{3}$ *est un générateur de* $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*, \cdot)$, *et comme par ailleur* $\bar{1}$ *est un générateur de* $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$, *on en déduit que l'application*
$$\begin{array}{ccc}\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} & \to & (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*\\ \bar{k} & \mapsto & \bar{3}^k\end{array}$$
   est un isomorphisme.

4. Montrer qu'un groupe G d'ordre 6 contient forcément au moins un élément d'ordre 2.

   Solution. (**1 point**)
   Si G contient un élément g d'ordre 6, alors g^3 est un élément d'ordre 2. Sinon par Lagrange les 5 éléments non neutre de G sont d'ordre 2 ou 3. Mais les éléments d'ordre 3 viennent par paire h, h^{-1}, ainsi il y a au moins un des 5 éléments non neutre qui est d'ordre 2.

5. Montrer que le groupe alterné A_4 ne contient aucun sous-groupe d'ordre 6.

   Solution. (**1.5 points**)
   1ère façon (qui utilise la classification des groupes d'ordre 6): si $G \subset A_4$ est d'ordre 6, clairement il n'est pas cyclique (aucun élément d'ordre 6 dans S_4), donc il est isomorphe à S_3 et est engendré par un élément a d'ordre 2 et un élément b d'ordre 3 vérifiant $aba^{-1} = b^{-1}$. Dans A_4, cela implique que a est une double transposition et b un 3-cycle, mais alors aba^{-1} est un 3-cycle qui n'a pas le même support que b, et donc en particulier l'égalité $aba^{-1} = b^{-1}$ est impossible.

   2ème façon (qui utilise la connaissance des classes de conjugaison dans A_4): Si $G \subset A_4$ est d'ordre 6, il est d'indice 2, donc distingué, donc G est une union de classes de conjugaison dont celle du neutre. Mais les classes de conjugaison sont de cardinaux $1, 3, 4, 4$, contradiction.

6. Quel est le plus petit n tel que le groupe alterné A_n contienne un élément d'ordre 6 ?

   Solution. (**1.5 points**)
   Par la question précédente on a $n \geq 5$. Mais on constate que les seuls éléments d'ordre 6 dans S_5 sont de type $(2, 3)$, donc de signature -1, et dans S_6 on a aussi les 6-cycles, encore de signature -1. Le plus petit n qui convient est $n = 7$, en prenant des permutations de type $(2, 2, 3)$, comme par exemple $\sigma = (1\,2)(3\,4)(5\,6\,7)$.

7. Quel est le plus petit n tel que le groupe alterné A_n contienne un sous-groupe d'ordre 6 ?

   Solution. (**1.5 points**)
   Par la question 5 on sait que $n \geq 5$. En fait $n = 5$ convient car A_5 contient un groupe H d'ordre 6 isomorphe à S_3, en prenant les permutations de $\{1, 2, 3\}$ et en composant par $(4\,5)$ celles de signature -1 (c'est à dire chacune des trois transpositions):

$$H = \{\mathrm{id}, (12)(45), (13)(45), (23)(45), (123), (132)\}$$