Séries de Laurent

Notes de cours pour le mardi 10 mars (pour rappel).

Définition. Une série de Laurent est une série de la forme $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$. La somme $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$ s'appelle la partie principale (ou partie singulière) de la série de Laurent

Proposition. *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $a \in U$, et $f\colon U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $D(a,r) \subset U$ un disque ouvert. Alors la fonction f admet un développement en série de Laurent*

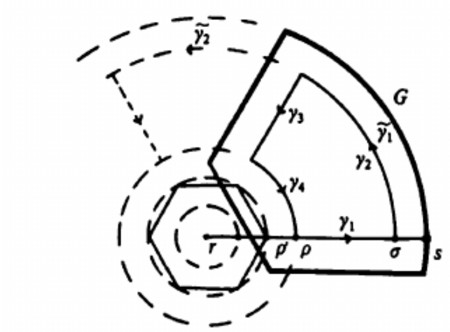
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$$

qui converge normalement sur tout compact du disque épointé $D^*(a,r)$.

Remarque. On connait déjà la proposition dans deux cas particuliers :

- Singularité éliminable : la partie principale est vide.
- Pôle : la partie principale n'a qu'un nombre fini de termes $\sum_{n=-m}^{-1} a_n(z-a)^n$.

Remarque. Dans la preuve ci-dessous on utilise le fait que si g est holomorphe sur un disque épointé, et si γ_1, γ_2 paramètrent deux cercles concentriques contenus dans ce disque épointé, alors les intégrales $\int_{\gamma_1} g(z)dz$ et $\int_{\gamma_2} g(z)dz$ sont égales. Une façon de voir ça est d'utiliser un découpage en convexes, pour se ramener au fait que si g est holomorphe sur un convexe G, alors pour tout lacet γ à support dans G on a $\int_\gamma g(z)dz = 0$. La figure suivante suggère quels convexes G il faut utiliser. La figure est tirée du livre [Rem91, p. 344], je vous y renvoie pour le détail des explications.



Preuve. Quitte à translater en précomposant par $z \to z-a$ on peut supposer $a = 0$. Notons $D^* = D^*(0,r)$ un disque épointé contenu dans $U \setminus \{0\}$, et soit $K \subset D^*$ un compact. On choisit $r_1, r_2, \varepsilon > 0$ tel que pour tout $z \in K$ on ait

$$0 < r_1 < r_1 + \varepsilon \leqslant |z| \leqslant r_2 - \varepsilon < r_2 < r$$

Pour $z_0 \in K$ et $w \in D^*$ notons $g(w) = \frac{f(w)-f(z_0)}{w-z_0}$, $g(z_0) = f'(z_0)$. La fonction g est holomorphe sur D^*, et

$$\int_{\gamma_2} g(w)dw = \int_{\gamma_1} g(w)dw = 0$$

où γ_1, γ_2 sont les cercles de rayons r_1, r_2 parcourus une fois dans le sens direct (à justifier avec argument de découpage en convexes, voir remarque et référence ci-dessus). Autrement dit

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z_0} dw - 2i\pi f(z_0) = \int_{\gamma_2} \frac{f(w)-f(z_0)}{w-z_0} dw = \int_{\gamma_1} \frac{f(w)-f(z_0)}{w-z_0} dw = \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z_0} dw - 0$$

Pour w sur le cercle γ_2 :

$$\frac{1}{w-z_0}=\frac{1}{w}\frac{1}{1-\frac{z_0}{w}}=\frac{1}{w}\sum_{n\geqslant 0}(\frac{z_0}{w})^n=\sum_{n\geqslant 0}\frac{z_0^n}{w^{n+1}}$$

qui comme fonction de z_0 converge normalement donc uniformément sur le disque $|z_0|\leqslant r_2-\varepsilon$, et donc aussi sur K.

De même pour w sur le cercle γ_1 :

$$\frac{1}{w-z_0}=-\frac{1}{z_0}\frac{1}{1-\frac{w}{z_0}}=-\frac{1}{z_0}\sum_{n\geqslant 0}(\frac{w}{z_0})^n=-\sum_{n\leqslant -1}\frac{z_0^n}{w^{n+1}}$$

qui converge normalement sur $|z_0|\geqslant r_1+\varepsilon$.

En remplaçant, et en échangeant somme et intégrale (ok par convergence uniforme sur un compact), on obtient

$$\begin{aligned} f(z_0)&=\frac{1}{2i\pi}\left[\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{w-z_0}dw-\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z_0}dw\right]\\ &=\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{w^{n+1}}dw\right)z_0^n+\sum_{n\leqslant -1}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w^{n+1}}dw\right)z_0^n\\ &=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_nz^n \text{ avec } c_n=\int_\gamma\frac{f(w)}{w^{n+1}}dw\end{aligned}$$

où γ est n'importe quel cercle centré en 0 et de rayon compris entre r_1 et r_2. □

Remarque. Dans la preuve on peut prendre r_1 et ε arbitrairement proches de 0, ainsi on a montré au passage que la partie principale

$$R(z)=\sum_{-\infty}^{-1}c_n(z-a)^n$$

du développement en série de Laurent est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ (et non pas seulement sur $U\setminus\{a\}$).

Résidus

Proposition. *Soit f holomorphe sur un disque épointé $D^*(z_0,r)$, avec développement en série de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$, et soit γ un lacet à valeurs dans $D^*(z_0,r)$. Alors*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)dz=c_{-1}\cdot \mathrm{Ind}_\gamma(z_0).$$

Preuve. Le développement de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$ converge uniformément sur Image(γ), on peut donc intervertir somme et intégrale et obtenir :

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_\gamma\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^ndz=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\int_\gamma(z-z_0)^ndz=c_{-1}\cdot 2i\pi\cdot\mathrm{Ind}_\gamma(z_0).\ \square$$

Remarque. Le calcul précédent montre que le coefficient c_{-1} du développement en série de Laurent est uniquement déterminé par f. De manière similaire, chaque coefficient c_n est uniquement déterminé par f, via la formule

$$c_n=\int_\gamma\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw$$

On obtient que le développement en série de Laurent d'une fonction f admettant une singularité isolée en un point z_0 est unique

Définition. Si f est holomorphe sur $U \setminus \{z_0\}$ avec développement de Laurent en $z_0 \in U$ de la forme $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$, le coefficient c_{-1} est appelé le résidu de f en z_0, noté $\mathrm{Res}_{z_0}(f)$.

Remarque.
- "Résidu" : ce qui subsiste quand on intègre le long d'un cercle autour de z_0.
- Aucune raison de supposer que z_0 est un pôle pour parler de résidu, mais le calcul du résidu est plus facile quand z_0 est un pôle. Par exemple si z_0 est un pôle simple de f, on a $\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$.

Théorème (Résidus sur un convexe)**.** *Soit U un ouvert convexe (ou étoilé), $A \subset U$ un ensemble fini de points, $f\colon U \setminus A \to \mathbb{C}$ holomorphe, et γ un lacet à valeurs dans $U \setminus A$. Alors*
$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{a\in A} \mathrm{Ind}_\gamma(a)\cdot \mathrm{Res}_a(f).$$

Preuve. Notons R_a la partie principale du développement de Laurent de f en $a \in A$. Comme R_a est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{a\}$, on a $g := f - \sum_{a\in A} R_a$ holomorphe sur $U \setminus A$ avec une singularité éliminable en chaque $a \in A$. Ainsi g se prolonge en une fonction holomorphe sur U, et comme U est convexe par Goursat $\int_\gamma g(z)dz = 0$, d'où
$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{a\in A}\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma R_a(z)dz.$$
Or (c'est la proposition précédente)
$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma R_a(z)dz = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \sum_{-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n dz = \sum_{-\infty}^{-1} c_n \underbrace{\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (z-a)^n dz}_{=0 \text{ sauf si } n=-1}$$
$$= c_{-1}\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{1}{z-a}dz = \mathrm{Res}_a(f)\cdot \mathrm{Ind}_\gamma(a). \quad \square$$

Définition. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Une partie $S \subset U$ est dite localement finie si pour tout $z \in U$, il existe un voisinage V de z tel que $V \cap S$ est fini (et donc quitte à réduire V cette intersection est réduite à zéro ou un élément).

Si $S \subset U$ est une partie localement finie d'un ouvert U, et que f est holomorphe sur $U \setminus S$ est que chaque $s \in S$ est un pôle (éventuellement d'ordre 0, donc une singularité éliminable), on dit que f est une fonction méromorphe sur U.

Lemme. *Si U est un ouvert connexe, l'ensemble des fonctions méromorphes sur U est un corps.*

Preuve. Si f est méromorphe sur U et non identiquement nulle, alors chaque zéro d'ordre k de f correspond à un pôle d'ordre k de $1/f$, et chaque pôle d'ordre k de f correspond à un zéro d'ordre k de $1/f$. $\square$

Remarque. L'ensemble des fonctions méromorphes sur un ouvert non connexe admet des diviseurs de zéro.

Définition. Un lacet $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ est dit simple si γ est injectif sur $]a,b]$, $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Image}(\gamma)$ admet exactement deux composantes connexes, et γ est orienté dans le sens direct de sorte que sur la composante connexe bornée la fonction indice prend la valeur 1 : on dira qu'un tel point est à l'intérieur de γ.

Proposition. *Soit f une fonction méromorphe sur un convexe U, γ un lacet simple à valeur dans U dont l'image évite les zéros et pôles de f, Z et P l'ensemble (fini) des zéros et pôles de f à l'intérieur de γ, et $m(a) \geqslant 0$ l'ordre de chaque zéro ou pôle $a \in Z \cup P$. Alors*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{a\in Z} m(a) - \sum_{a\in P} m(a).$$

Autrement dit cette intégrale compte le nombre de zéros et pôle de f avec multiplicité.

Preuve. Soit $a \in Z \cup P$, sur un voisinage de a on peut écrire

$$f(z) = (z-a)^k g(z)$$

avec g holomorphe, $|k| = m(a) \geqslant 1$ et $g(a) \neq 0$. Alors $f'(z) = k(z-a)^{k-1}g(z) + (z-a)^k g'(z)$, et donc

$$\frac{f'z)}{f(z)} = \frac{k}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Ainsi la dérivée logarithmique f'/f admet un pôle simple en a, de résidu égal à k. La formule annoncée découle alors du théorème des résidus. □

Proposition. *Soit $f\colon U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante sur un ouvert connexe U, $z_0 \in U$, $w_0 = f(z_0)$, et notons $m \geqslant 1$ l'ordre de z_0 comme zéro de la fonction $z \mapsto f(z) - w_0$. Alors il existe des réels $r, s > 0$ tel que pour tout w vérifiant $0 < |w - w_0| < s$, la fonction $z \mapsto f(z) - w$ admet exactement m zéros d'ordre 1 dans le disque $D(z_0, r)$.*

Preuve. La fonction f étant non constante, les fonctions $f - w_0$ et f' ont des zéros isolés, et en particulier il existe un disque épointé $D^*(z_0, \rho)$ sur lequel ces deux fonctions ne s'annullent pas. Soit $r \in]0, \rho[$, et $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ le cercle de rayon r et centre z_0. Notons δ le lacet $\delta = f \circ \gamma$, dont l'image ne contient pas w_0. On a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w_0}dz = m = \frac{1}{2i\pi}\int_\delta \frac{1}{v - w_0}dv = \mathrm{Ind}_\delta(w_0).$$

La fonction $z \mapsto \mathrm{Ind}_\delta(z)$ est localement constante égale à m sur un petit disque $D(w_0, s)$. On a donc, pour tout $w \in D^*(w_0, s)$:

$$m = \mathrm{Ind}_\delta(w) = \frac{1}{2i\pi}\int_\delta \frac{1}{v-w}dv = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w}dz$$

et la condition f' non nulle assure que les m zéros de $f - w$ contenus à l'intérieur du cercle γ bordant le disque $D(z_0, r)$ sont chacun d'ordre 1. □

Exemple. Considérer la fonction $f\colon z \mapsto z^2$ au voisinage de $z_0 = 0$, d'image $w_0 = 0$, puis au voisinage de $z_0 = i$, d'image $w_0 = -1$. Dans ce dernier cas la préimage d'un petit disque $D(-1, s)$ a deux composantes connexes, voisinages de i et $-i$.

Corollaire (Image ouverte)**.** *Si $f\colon U \to \mathbb{C}$ est holomorphe non constante sur un ouvert (connexe) U, alors $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.*

Preuve. Pour tout $z_0 \in U$, la proposition donne un disque ouvert $D(f(z_0), s)$ contenu dans l'image de f. □

Proposition (Inversion locale)**.** *Soit $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorphe, $z_0 \in U$, et supposons $f'(z_0) \neq 0$. Alors il existe des voisinages V de z_0 et W de $w_0 = f(z_0)$ tel que f induise une bijection de V vers W, avec f^{-1} holomorphe sur W, et pour tout $w_1 = f(z_1) \in W$ on a $(f^{-1})'(w_1) = \frac{1}{f'(z_1)}$.*

Preuve. L'hypothèse $f'(z_0) \neq 0$ revient à dire que z_0 est un zéro d'ordre 1 de la fonction $f(z) - w_0 = f'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2}f''(z_0)(z - z_0)^2 + \ldots$, et donc par la proposition il existe un disque $W = D(w_0, s)$ sur lequel chaque point a exactement une préimage par f dans le disque $D(z_0, r)$. Posons $V = f^{-1}(W) \cap D(z_0, r)$. Par construction $f \colon V \to W$ est une bijection, et comme c'est une application ouverte c'est un homéomorphisme. Reste à voir que f^{-1} est holomorphe et à calculer sa dérivée. En notant $f(z) = w$ et $f(z_1) = w_1$, par continuité de f^{-1} on a

$$\lim_{w \to w_1} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_1)}{w - w_1} = \lim_{z \to z_1} \frac{z - z_1}{f(z) - f(z_1)} = \frac{1}{f'(z_1)}. \qquad \square$$

Logarithme complexe

Notes de cours pour le mardi 17 mars (le début a déjà été vu).

Définition. Soit $U \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert. Une fonction $\ell\colon U \to \mathbb{C}$ est appelée une détermination continue du logarithme (ou branche du logarithme) si ℓ est continue et $e^{\ell(z)} = z$ pour tout $z \in U$.

Proposition. (1) *Si ℓ_1, ℓ_2 sont deux branches du logarithme sur un même ouvert connexe U, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que*

$$\ell_1(z) = \ell_2(z) + 2i\pi k, \forall z \in U.$$

(2) *Toute branche du logarithme est holomorphe.*

Preuve. (1) On a

$$1 = \frac{z}{z} = \frac{e^{\ell_1(z)}}{e^{\ell_2(z)}} = e^{\ell_1(z)-\ell_2(z)},$$

donc $\ell_1(z) - \ell_2(z) \in 2i\pi\mathbb{Z}$ pour tout $z \in U$, et une fonction continue à valeurs dans un discret est localement constante, donc constante sur un connexe.

(2) Par le théorème d'inversion locale, pour tout $z_0 \in U$ il existe une branche du logarithme ℓ_1 définie sur un disque $D(z_0, r)$ avec r suffisamment petit. Donc tout logarithme sur $D(z_0, r)$, qui diffère de ℓ_1 par une constante, est également holomorphe sur $D(z_0, r)$. Ceci étant vrai en chaque $z_0 \in U$, le résultat suit. $\square$

Proposition. *Soit $U \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert connexe, et $\ell\colon U \to \mathbb{C}$ holomorphe. Sont équivalents :*

(*i*) *ℓ est une branche du logarithme sur U ;*

(*ii*) *$\ell'(z) = \frac{1}{z}$ et $e^{\ell(a)} = a$ pour au moins un point $a \in U$.*

Preuve. (*i*) $\implies$ (*ii*). On dérive l'égalité $e^{\ell(z)} = z$ pour obtenir $\ell'(z)e^{\ell(z)} = 1$, d'où $\ell'(z) = \frac{1}{z}$.

(*ii*) $\implies$ (*i*). La fonction $g(z) := ze^{-\ell(z)}$ est holomorphe sur U, et

$$g'(z) = e^{-\ell(z)} - \underbrace{\ell'(z)z}_{=1}\, e^{-\ell(z)} = 0.$$

Ainsi g est constante sur le connexe U, et vaut 1 en a par hypothèse, donc $e^{\ell(z)} = z$ sur U. $\square$

On cherche maintenant à expliciter une formule pour une branche du logarithme. On travaille sur un ouvert étoilé contenu dans $\mathbb{C}^*$, par exemple l'ouvert $\mathbb{C} \setminus [0, -\infty[$, qui est étoilé par rapport à 1. On a vu qu'on peut construire une primitive de $1/z$ en intégrant le long des segments $\gamma = [1, z]$:

$$\begin{aligned}
\ell(z) &= \int_{[1,z]} \frac{1}{w} dw \qquad (w = \rho(t)e^{i\theta(t)}) \\
&= \int_0^1 \frac{\rho'(t)e^{i\theta(t)} + \rho(t)i\theta'(t)e^{i\theta(t)}}{\rho(t)e^{i\theta(t)}} dt \\
&= [\ln \rho(1) - \ln \rho(0)] + i[\theta(1) - \theta(0)] \\
&= \ln |z| + i \arg(z)
\end{aligned}$$

où $z \mapsto \arg(z)$ est une détermination continue de l'argument sur U (comparer avec les calculs similaires faits au moment de la définition de l'indice), c'est-à-dire que $\arg\colon U \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que pour tout $z \in U$ on a $z = |z|e^{i\arg(z)}$.

Remarquons qu'on aurait pu trouver directement ces formules : si $\ell(z) = a(z) + ib(z)$ (où a et b sont les parties réelle et imaginaire), alors $e^{\ell(z)} = e^{a(z)}e^{ib(z)} = z = re^{i\theta}$, donc

$$a(z) = \ln|z| = \ln r$$
$$b(z) = \arg(z) = \theta.$$

Cela montre aussi que tout nombre complexe non nul admet un logarithme (et même une infinité), le problème est de définir une fonction logarithme *continue* sur un ouvert donné. Si une telle fonction existe, elle est complètement déterminée par sa valeur en un point de U :

Proposition. *Soit $U \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert connexe. Sont équivalents :*

(1) *Il existe une branche du logarithme $\ell\colon U \to \mathbb{C}$;*

(2) *Il existe une détermination continue de l'argument* $\arg\colon U \to \mathbb{R}$ *;*

(3) *Pour tout lacet γ à valeurs dans U, l'indice* $\mathrm{Ind}_\gamma(0)$ *est nul.*

Preuve. (3) $\implies$ (2) : Soit z_0, z_1 deux points de U, et soit $\arg(z_1)$ un choix d'argument de z_1. Si $\gamma\colon I \to U$ est un chemin de z_0 à z_1, en calculant la variation d'argument le long de γ on obtient un choix d'argument pour z_1. Cette variation d'argument est donnée par la partie imaginaire de $\int_\gamma \frac{1}{z}dz$, en effet

$$\int_\gamma \frac{1}{z}dz = \ln\left|\frac{z_1}{z_0}\right| + i(\arg(z_1) - \arg(z_0)).$$

Si $\tilde\gamma$ est un autre chemin, et que $\tilde\gamma^{-1}\cdot\gamma$ dénote le lacet obtenu en parcourant γ puis $\tilde\gamma$ dans le sens inverse, l'hypothèse (3) assure que

$$\mathrm{Ind}_{\tilde\gamma^{-1}\cdot\gamma}(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\tilde\gamma^{-1}\cdot\gamma} \frac{1}{z}dz = 0,$$

et donc les intégrales

$$\int_\gamma \frac{1}{z}dz = \int_{\tilde\gamma} \frac{1}{z}dz$$

ne dépendent pas du choix du chemin de z_0 à z_1.

(2) $\implies$ (1) : poser $\ell(z) = \ln|z| + i\arg(z)$.

(1) $\implies$ (3) : par définition et par la proposition précédente

$$2i\pi\,\mathrm{Ind}_\gamma(0) = \int_\gamma \frac{1}{z}dz = \int_\gamma \ell'(z) = 0. \qquad \square$$

Cherchons maintenant une expression analytique du logarithme (développement en série entière). Sur l'intervalle $]-1,1[$, on sait (ou on retrouve, en intégrant terme à terme le développement de Taylor de $\frac{1}{1+x}$) que

$$\ln(1+x) = \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

Cela équivaut à

$$\ln(x) = \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n} \text{ sur }]0,2[.$$

La fonction $\ell(z) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(z-1)^n$ est holomorphe sur le disque $D(1,1)$, et $e^{\ell(z)} - z = 0$ sur $]0,2[$, donc sur $D(1,1)$ par prolongement analytique.

On peut en déduire des développements en série entière au voisinage d'un point arbitraire $a \in \mathbb{C}^*$, de logarithme b : en effet $z \mapsto \ell(\frac{z}{a}) + b$ est alors un logarithme sur $D(a,|a|)$.

Exemple. (1) Exemple de "la" détermination principale : je mets des guillemets, car cette détermination est préférée par rapport aux autres seulement par convention. Il s'agit de la branche du logarithme définie sur $\mathbb{C}$ privé des réels négatifs, avec $\ell(1) = 0$. Précisément, c'est la fonction

$$\ell\colon \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{<0} \to \mathbb{C}$$

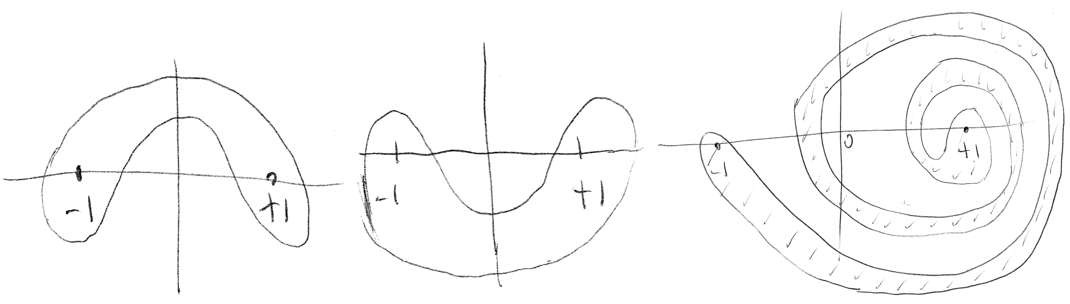
définie par

$$\ell(z) = \ln|z| + i\arg(z),$$

où $\arg(z) \in]-\pi,\pi[$ est l'argument de z.

(2) Un bon test pour vérifier que vous avez compris la notion de logarithme complexe : trouvez (il s'agit de faire un dessin) un ouvert connexe U de $\mathbb{C}^*$ contenant -1 et $+1$ et tel qu'il existe une branche du logarithme $\ell\colon U \to \mathbb{C}$ vérifiant $\ell(1) = 2i\pi$, $\ell(-1) = -i\pi$ (je l'ai inclus dans le test 3).

Exemple. Pour chacun des trois ouverts ci-dessous, si ℓ est la branche du logarithme telle que $\ell(1) = 0$, à quoi est égal $\ell(-1)$?



Réponse :

(1) Pour le premier (à gauche), on passe de $+1$ à -1 en restant dans U en faisant un demi-tour dans le sens positif (trigonométrique), donc si l'argument de $+1$ est $\theta = 0$, alors l'argument de -1 est $\theta = \pi$, et donc $\ell(-1) = i\pi$.

(2) Pour le second, cette fois on fait un demi-tour dans le sens négatif, donc $\ell(-1) = -i\pi$.

(3) Enfin pour le dernier, on passe de $+1$ à -1 en faisant un tour et demi dans le sens négatif (ce qui compte c'est le nombre de tours autour de 0, donc la première boucle n'a aucune influence sur la variation d'argument par rapport à 0), donc $\ell(-1) = -3\pi$.

Définition. Si f est holomorphe sur U et $k \geqslant 2$, on dit qu'une fonction g holomorphe sur U est une racine k-ième de f si pour tout $z \in U$ on a $g(z)^k = f(z)$.

Proposition. *Supposons qu'il existe une branche du logarithme ℓ définie sur U. Alors toute fonction holomorphe f à valeurs dans U admet des racines k-ièmes pour tout $k \geqslant 2$.*

Preuve. Il suffit de poser $g(z) = \exp\frac{1}{k}\ell(f(z))$. $\square$

Remarque. Contrairement au cas réel, les identités

$$\ell(\exp(z)) = z \quad \text{et} \quad \ell(z_1 z_2) = \ell(z_1) + \ell(z_2)$$

ne sont pas toujours vraies.

Pour la première égalité, il peut y avoir un problème de définition, par exemple pour ℓ la détermination principale et $z = i\pi$, on a $\exp(i\pi) = -1$ et $\ell(-1)$ n'est pas défini.

Pour un contre-exemple à la deuxième égalité, prendre par exemple $z_1 = z_2 = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]\pi/2, \pi[$, alors

$$\ell(z_1 z_2) = \ell(e^{i2\theta}) = i(2\theta - 2\pi) \neq i(2\theta) = \ell(z_1) + \ell(z_2).$$

(Voir [Rem91, p. 160] pour un peu plus de détail).

Complément : un exemple d'utilisation du théorème des résidus pour un calcul d'intégrale

Exemple tiré de [Gam01, p. 206].

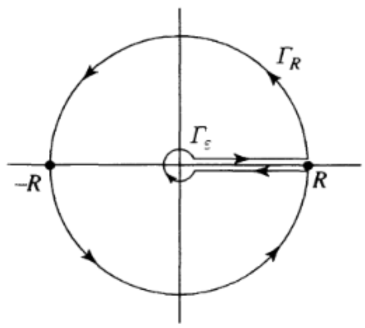
On se propose de montrer, pour $-1 < a < 1$:

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{(1+x)^2} dx = \frac{\pi a}{\sin(\pi a)}$$

Le cas $a = 0$ peut se traiter directement, on suppose maintenant $a \neq 0$. On considère la fonction $z \mapsto z^a$ défini sur $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$ par $r^a e^{ia\theta}$ où $z = re^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, 2\pi[$. On peut étendre cette fonction au segment $[0, +\infty[$ de deux manières :

- “par au-dessus” : on fait tendre θ vers 0 pour obtenir $r \mapsto r^a$.
- “par en-dessous” : on fait tendre θ vers 2π pour obtenir $r \mapsto r^a e^{2i\pi a}$.

On intègre la fonction $f(z) = \frac{z^a}{(1+z)^2}$ sur le contour suivant, pour R grand :



Le résidu en $z = -1$, qui est un pôle d'ordre 2 pour f, s'obtient par la suite de manipulations : multiplier par $(1+z)^2$, dériver, évaluer en $z = -1$:

$$\mathrm{Res}_{-1}(f) = az^{a-1}|_{z \to -1} = -ae^{i\pi a}.$$

On obtient le résultat attendu en montrant :

(1) Les intégrales sur les cercles de rayons ε et R tendent vers 0 quand $\varepsilon \to 0$ et $R \to \infty$.

$$\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{z^a}{(1+z)^2} dz \right| \leqslant 2\pi\varepsilon \frac{\varepsilon^a}{(1-\varepsilon)^2} \to_{\varepsilon \to 0} 0,$$

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{z^a}{(1+z)^2} dz \right| \leqslant 2\pi R \frac{R^a}{(R-1)^2} \to_{R \to \infty} 0.$$

(2) L'intégrale sur le segment supérieur tend vers l'intégrale I cherchée.

(3) L'intégrale sur le segment inférieur tend vers l'intégrale $-e^{2\pi i a}I$.

Par le théorème des résidus on obtient
$$-a2i\pi e^{i\pi a} = (1 - e^{2\pi i a})I.$$
et donc
$$I = \frac{-a2i\pi e^{i\pi a}}{1 - e^{2\pi i a}} = \frac{2ia\pi}{e^{\pi i a} - e^{-\pi i a}} = \frac{\pi a}{\sin(\pi a)}$$
Pour plus d'exemples de calculs d'intégrales via le théorème des résidus voir [Pab95, Chapitre 10].

Point de vue géométrique

Notes de cours pour le mardi 24 mars

Définition. On appelle <u>similitude</u> (directe) une application linéaire $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui préserve les angles orientés.

Lemme. *Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire. Sont équivalents :*

(1) *f est une similitude ;*

(2) *f est la composée d'une homothétie et d'une rotation ;*

(3) *La matrice de f dans la base canonique est $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ pour certains réels $(a,b) \neq (0,0)$.*

Preuve. (3) $\implies$ (2) : si r est le réel positif tel que $r^2 = a^2 + b^2$, alors on peut écrire $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$, et f de matrice

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

est la composée de la rotation d'angle θ et de l'homothétie de rapport r.

(2) $\implies$ (1) est clair, montrons donc (1) $\implies$ (3). Soit $\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ la matrice de f. L'orthogonalité des images des vecteurs $(1,0)$ et $(0,1)$ d'une part, et $(1,1)$ et $(-1,1)$ d'autre part, donne les conditions

$$\begin{cases} ac + bd = 0 \\ (a+c)(-a+c) + (b+d)(-b+d) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} ac + bd = 0 \\ a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \end{cases}$$

La première égalité implique $c = -\lambda b$, $d = \lambda a$ pour un certain λ, on a $\det f = \lambda(a^2 + b^2) > 0$ donc $\lambda > 0$, et la deuxième égalité implique alors $\lambda^2 = 1$ donc aussi $\lambda = 1$. □

Corollaire. *Sous l'identification naturelle $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, une application linéaire $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ correspond à une application $\mathbb{C}$-linéaire $z \mapsto wz$ pour un certain $w \in \mathbb{C}^*$ si et seulement si f est une similitude.*

Preuve. On écrit $w = re^{i\theta}$ et on constate que la multiplication par w correspond à la rotation d'angle θ composée avec l'homothétie de rapport r, et par le lemme toute similitude est de cette forme. □

Théorème (conditions de Cauchy-Riemann, [Gam01, p.47] et [Rem91, p.51])**.** *Soit $f\colon U \to \mathbb{C}$ une fonction et écrivons $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ avec u, v à valeurs réelles. Alors f est holomorphe sur U si et seulement si u, v sont de classes $\mathcal{C}^1$ et satisfont les conditions suivantes (dites de "<u>Cauchy-Riemann</u>") :*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Preuve. Par définition f est holomorphe de fonction dérivée f' si pour tout $z \in U$ il existe une fonction $\varepsilon(h)$ telle que $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ et

$$f(z+h) = f(z) + f'(z) \cdot h + |h|\varepsilon(h).$$

D'autre part, vue comme une application de $U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f est différentiable au sens réel en $(x,y) \in U$ s'il existe une application linéaire $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ et une fonction ε avec $\lim_{(h_1,h_2)\to 0} \varepsilon(h_1,h_2) = 0$ telle que

$$f(x+h_1, y+h_2) = f(x,y) + L(h_1,h_2) + \|(h_1,h_2)\|\varepsilon(h_1,h_2).$$

De plus dans ce cas les dérivées partielles de f existent et

$$L = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{$\dagger$}$$

Réciproquement (formule de Taylor), si les dérivées partielles existent et sont continues sur U, alors f est $\mathbb{R}$-différentiable en tout point de U, avec L donnée par les dérivées partielles ci-dessus.

On obtient qu'une fonction holomorphe est une application C^1-différentiable au sens réel tel que de plus en chaque point $z = x + iy \in U$ l'application linéaire L corresponde à la multiplication par un nombre complexe $f'(z) = a + ib = re^{i\theta}$, ce qui en termes matriciels revient à demander

$$L = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Demander que les termes diagonaux de l'expression ($\dagger$) soient égaux et les termes anti-diagonaux opposés correspond exactement aux conditions de Cauchy-Riemann. $\square$

Remarque ([Rem91, p. 53])**.** L'hypothèse sur la continuité des dérivées partielles est importante. La fonction $u(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, avec par convention $u(0, 0) = 0$, admet des dérivées partielles partout, y compris en $(0, 0)$. Par exemple :

$$\frac{u(x, 0) - u(0, 0)}{x} \to 0 = \partial_x u(0, 0)$$

Pourtant la fonction u n'est même pas continue en 0 (comparer les limites le long de $x = 0$ et de $x = y$).

Définition. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. Une fonction $u\colon U \to \mathbb{R}$ est dite harmonique si elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et satisfait l'équation (dite de Laplace) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Corollaire ([Gam01, p.55])**.** *Soit $f = u + iv$ une fonction holomorphe sur un ouvert U. Alors les fonctions u et v sont harmoniques.*

Preuve. En prenant les dérivées partielles des relations de Cauchy-Riemann on obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

d'où le résultat. $\square$

Une autre conséquence immédiate des conditions de Cauchy-Riemann concerne les lignes de niveau des fonctions parties réelle et partie imaginaire d'une fonction holomorphe. Rappelons que si $h\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction et que $a \in \mathbb{R}$, on appelle ligne de niveau (de niveau a) l'ensemble $\{(x, y) \in U \mid h(x, y) = a\}$ (penser aux courbes d'altitude sur une carte de randonnée, ou aux courbes isobares à la météo...)

Corollaire. *Soit $f = u + iv$ une fonction holomorphe sur un ouvert U. Alors les lignes de niveaux de u et v sont orthogonales.*

Preuve. Il s'agit de voir que les gradients

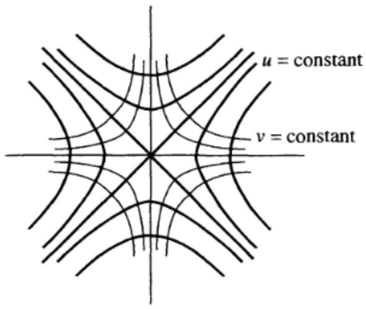
$$\operatorname{grad} u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \operatorname{grad} v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

de u et v sont orthogonaux (rappel : les gradients sont orthogonaux aux lignes de niveau). Or par les conditions de Cauchy Riemann on a

$$\operatorname{grad} v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}$$

ce qui donne bien $\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = 0$ en tout point de U. $\square$

Exemple. On peut constater l'orthogonalité des lignes de niveaux de u et v sur des exemples simples, par exemple pour la fonction $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i(2xy)$ le dessin est le suivant :



Autres exemples à méditer : exp, branche du logarithme...

Définition. Soit γ_1, γ_2 deux chemins de classe $\mathcal{C}^1$ définis sur des intervalles ouverts contenant 0, et tel que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$, et que les vecteurs dérivés en 0 ne s'annulent pas. Alors l'angle entre γ_1 et γ_2 au point d'intersection z_0 est défini comme l'angle entre les vecteurs $\gamma_1'(0)$ et $\gamma_2'(0)$.

Toute application différentiable $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ envoie deux telles courbes sécantes en $z_0 \in U$ sur deux nouvelles courbes sécantes en $f(z_0)$ définies par $f \circ \gamma_1$ et $f \circ \gamma_2$, de vecteurs vitesse $Df(z_0) \cdot \gamma_1'(0)$ et $Df(z_0) \cdot \gamma_2'(0)$:

Il fait donc sens de se demander si une telle application (même non linéaire) préserve les angles ou non, en se ramenant à la question pour les différentielles en chaque point (qui elles sont linéaires).

Définition. Une application différentiable de $U \subset \mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ est conforme si elle préserve les angles (orientés).

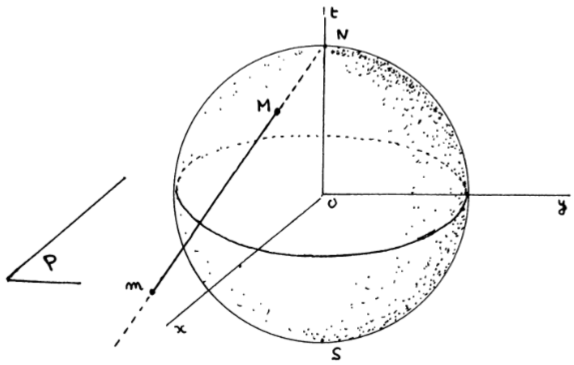
Proposition ([Gam01, p.59 & 126])**.** *Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, à valeur dans $\mathbb{R}^2$. Alors f est conforme si et seulement si f est holomorphe et f' ne s'annule pas.*

Preuve. Cela découle à nouveau de la remarque qu'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ préserve les angles orientés ssi elle est induite par la multiplication par un nombre complexe non nul. $\square$

Prologue : sphère de Riemann

Notes de cours pour le mardi 31 mars

On décrit une façon de visualiser la compactification de $\mathbb{C}$ par "ajout d'un point à l'infini".



Dans $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x_1, x_2, x_3), on note $\mathbb{S}$ la sphère unité et P le plan $x_3 = 0$, qu'on identifie à $\mathbb{C}$ via $(x_1, x_2, 0) \to x_1 + ix_2$.

Notons $N = (0, 0, 1)$ le "pôle nord" de $\mathbb{S}$, et pour tout point M de $\mathbb{S}$, notons m le point d'intersection de la droite(MN) avec le plan P. Ceci réalise une bijection (et en fait un homéomorphisme) entre $\mathbb{S} \setminus \{N\}$ et $\mathbb{C}$. Lorsque M tend vers le pôle nord N, le point m devient de module de plus en plus grand, et il est donc naturel d'identifier $N \in \mathbb{S}$ à un "point à l'infini" de $\mathbb{C}$.

On notera $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, et on y pensera comme étant une sphère via cette projection stéréographique. On dit que $\bar{\mathbb{C}}$ est la sphère de Riemann.

Homotopie, simple connexité

Définition. Deux lacets γ_0, γ_1 définis sur le même intervalle $[0, 1]$ sont homotopes dans un ouvert U s'il existe une application continue

$$h : (s, t) \in [0, 1] \times [0, 1] \mapsto h(s, t) \in U$$

tel que

- $h(0, t) = \gamma_0(t)$ et $h(1, t) = \gamma_1(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$;
- chaque $t \mapsto h(s, t)$ est un lacet, c'est-à-dire $h(s, 0) = h(s, 1)$ pour tout $s \in [0, 1]$

On dit aussi que h est une homotopie entre γ_0 et γ_1. Un ouvert U est simplement connexe si deux lacets quelconques à valeurs dans U sont homotopes.

NB : même si les deux lacets γ_0 et γ_1 sont $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on n'exige pas cette propriété pour les lacets intermédiaires γ_s. D'un côté cela apporte moins de contrainte pour créer des homotopies, par contre ce sera un obstacle à contourner quand on voudra intégrer.

Exercice. La relation d'homotopie est une relation d'équivalence sur les lacets d'un ouvert U.

Exemple. Un ouvert étoilé U par rapport à un point z_0 est simplement connexe. En effet tout lacet γ_1 est homotope au lacet constant $\gamma_0(t) = z_0$, en posant

$$h(s, t) = s\gamma_1(t) + (1 - s)z_0.$$

Proposition ([Gam01, p. 254]). *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Sont équivalents :*

(1) *U est simplement connexe.*

(2) *Pour tout $a \notin U$ et tout lacet γ à valeurs dans U, l'indice $\mathrm{Ind}_\gamma(a)$ est nul.*

(3) *Le complément de U dans la sphère de Riemann $\bar{\mathbb{C}}$ est connexe.*

Preuve. (2) $\implies$ (3). Par contraposée, supposons que $\bar{\mathbb{C}} \setminus U$ admette plusieurs composantes connexes, et donc en particulier au moins une composante connexe bornée B. Notons R l'union de toutes les autres composantes connexes (privé de l'infini), ainsi $\mathbb{C}$ est l'union disjointe de U, B et R, et les fermés B et R sont à distance strictement positive. Soit δ tel que $d(B,R) > 4\delta$, soit $a \in B$, et considérons un quadrillage de $\mathbb{C}$ par des carrés de côté δ, dont l'un contient a dans son intérieur. Soit K l'union des carrés C_j intersectant B : K est compact, on a $B \subset K$, et $K \cap R = \emptyset$. Notons ∂K le (ou les) lacets formés par le bord de K, alors on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial K} \frac{1}{z-a}dz = \sum_j \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial C_j} \frac{1}{z-a}dz = 1$$

car le seul carré C_j pour lequel cet indice est non nul est celui contenant a dans son intérieur. Donc l'un des lacets dans ∂K est le lacet d'indice non nul cherché.

(3) $\implies$ (2). Découle du fait que l'indice est constant sur les composantes connexes délimitées par γ, et nul sur la composante non bornée.

(2) $\implies$ (1). Soit γ un lacet dans U, on veut le déformer sur un lacet constant. On peut d'abord dessiner une grille de carrés de côté δ avec δ petit et déformer γ sur un lacet suivant la grille. On procède alors par récurrence sur la longueur $n\delta$ du lacet, le cas $n = 0$ étant clair. Si le lacet n'est pas simple, on peut l'écrire comme la concaténation de deux lacets de longueur plus courte : terminé. Supposons maintenant le lacet γ simple, et orienté dans le sens direct : tout point b dans la composante bornée vérifie $\mathrm{Ind}_\gamma(b) = +1$ et donc $b \in U$. Reste à montrer qu'on peut raccourcir le lacet : soit p un point de γ avec la partie imaginaire maximale, et parmi ceux-ci celui avec la partie réelle maximale. Le lacet est localement de la forme : un pas vers le haut pour arriver à p, $m \geqslant 1$ pas vers la gauche, 1 pas vers le bas, et les points juste au-dessus sont dans la composante non bornée donc, ceux juste en dessous sont dans composante bornée, et cela donne un raccourci.

(1) $\implies$ (2). Soit h une homotopie d'un lacet $\gamma = \gamma_1$ vers un lacet constant γ_0, et notons $\gamma_s = h(s,\cdot)$. On pourra conclure lorsqu'on disposera du théorème de Cauchy homotopique (ce sera l'objet du dernier cours), qui affirme que si γ_0 et γ_1 sont deux lacets homotopes dans U et f est holomorphe sur U, alors

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Appliqué ici à la fonction $f(z) = \frac{1}{2i\pi}\frac{1}{z-a}$, cela donne $0 = \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(a) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(a)$. □

Représentation conforme

On dit que deux ouverts connexes U_1, U_2 dans $\mathbb{C}$ sont biholomorphes, ou conformément équivalents, s'il existe une bijection holomorphe $f\colon U_1 \to U_2$.

Lemme. *Si U_1 et U_2 sont conformément équivalents, alors l'un est simplement connexe si et seulement si l'autre l'est aussi.*

Preuve. Supposons que U_2 soit simplement connexe, et que $f\colon U_1 \to U_2$ soit un biholomorphisme. Soit γ_0, γ_1 deux lacets dans U_1, on veut montrer qu'ils sont homotopes. Par hypothèse, il existe une homotopie $h(s,t)$ entre $f \circ \gamma_0$ et $f \circ \gamma_1$, qui sont des lacets dans U_2. Alors $f^{-1} \circ h$ est l'homotopie attendue entre γ_0 et γ_1. $\square$

Cela soulève la question : peut-on trouver deux ouverts simplement connexes mais qui ne sont pas conformément équivalent ? Il est facile de produire un tel exemple, rappelons le fait suivant déjà vu en TD :

Proposition. *Le plan complexe $\mathbb{C}$ et le disque ouvert $\mathbb{D}$ ne sont pas conformément équivalents.*

Preuve. Soit $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ une application holomorphe. En particulier c'est une fonction bornée, donc par le théorème de Liouville f est constante, et en particulier elle est non bijective. $\square$

La surprise est que c'est en fait le seul exemple ! C'est un théorème un peu difficile à montrer (on l'admet pour ce semestre), mais facile à énoncer :

Théorème (de représentation conforme de Riemann, admis)**.** *Soit $U \subsetneq \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe non égal à $\mathbb{C}$. Alors U est conformément équivalent au disque ouvert $\mathbb{D}$.*

En général il n'est pas envisageable d'expliciter le biholomorphisme depuis un ouvert U simplement connexe vers le disque, mais si U est de forme suffisamment simple c'est possible :

Exemple. (1) Soit $\mathbb{H} = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ le demi-plan supérieur. Alors

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{H} & \to & \mathbb{D} \\ z & \mapsto & \frac{z-i}{z+i} \end{array}$$

est un biholomorphisme. En effet en écrivant $z = x + iy$ on observe :

$$|z-i|^2 < |z+i|^2 \iff x^2 + (y-1)^2 < x^2 + (y+1)^2 \iff 0 < y.$$

De plus f est une bijection, dont l'inverse est $w \mapsto i\frac{1+w}{1-w}$.

(2) Secteurs (ouvert délimité par deux demi-droites issues d'un même point) : appliquer $z \to z^\beta$ pour se ramener au cas d'un demi-plan. Noter que z^β est défini par $\exp \beta\ell(z)$, où ℓ est une branche du logarithme. Cela s'applique à des secteurs d'angle éventuellement plus grand que π, et inclus en particulier le cas du plan fendu.

(3) Bandes (ouvert délimité par deux droites parallèles) : appliquer une rotation pour avoir une bande horizontale, une homothétie pour réduire la largeur, puis une exponentielle pour obtenir un secteur.

Définition. Une application de la forme $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ avec $\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ inversible est appelée une <u>homographie</u> (Parfois on peut vouloir se restreindre à une variable réelle, ou à a, b, c, d réels.)

Remarquer (exo !) que composer les homographies correspond à multiplier leurs matrices, et qu'une homographie ne change pas lorqu'on multiplie sa matrice par un scalaire.

Groupes d'automorphismes du plan, du demi-plan et du disque

Notes de cours pour le mardi 14 avril

Rappelons la propriété suivante des singularités essentielles :

Proposition (Weierstrass)**.** *Soit $a \in U$ une singularité essentielle d'une fonction f holomorphe sur U. Alors $f(U \setminus \{a\})$ est dense dans $\mathbb{C}$.*

Preuve. Par l'absurde, supposons que $f(U\setminus\{a\})$ ne soit pas dense, et soit $D(z_0, r)$ un disque ouvert ne rencontrant pas l'image de $U \setminus \{a\}$. La fonction $g(z) = 1/(f(z)-z_0)$ est bornée au voisinage de a, donc admet un prolongement holomorphe en a. Mais si $g(a) \neq 0$ la singularité de $f(z) = z_0 + \frac{1}{g(z)}$ est éliminable, et si $g(a) = 0$ la singularité de f est un pôle, contradiction dans les deux cas. □

Lemme ([Rem91, p. 308])**.** *Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ ("fonction entière"). Si $z \mapsto f(1/z)$ admet un pôle d'ordre m en 0 alors f est un polynôme de degré au plus m.*

Preuve. Notons $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, et supposons que $z \mapsto f(1/z)$, qui est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$, admette un pôle d'ordre m en 0. Alors pour tout $p \geqslant m$, on a $z^p f(1/z)$ holomorphe sur $\mathbb{C}$, et donc en notant γ le cercle de rayon 1 parcouru une fois dans le sens direct, le théorème des résidus donne :

$$0 = \int_\gamma z^p f(1/z) = \int_\gamma \sum_{n\geqslant 0} a_n z^{p-n} = 2i\pi a_{p+1}.$$ □

On conclut que $f(z) = \sum_{n=0}^m a_n z^n$ est un polynôme, de degré au plus m.

Définition. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On appelle automorphisme de U (ou biholomorphisme de U) une application holomorphe bijective $U \to U$ (et donc admettant une réciproque elle aussi holomorphe, par le théorème d'inversion locale holomorphe).

Proposition. *Les automorphismes du plan $\mathbb{C}$ sont les applications de la forme $z \mapsto az + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.*

Preuve. Clairement une telle application est un automorphisme, dont l'inverse est donné par $w \mapsto \frac{w-b}{a}$.

Maintenant soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un automorphisme arbitraire. Les images de $|z| < 1$ et de $|z| > 1$ sont des ouverts disjoints, en particulier l'image du disque $\mathbb{D}$ par $f(1/z)$ n'est pas dense et donc 0 n'est pas une singularité essentielle de $f(1/z)$.

S'il s'agit d'une singularité éliminable, alors la fonction initiale f est bornée sur $\mathbb{C}$, donc constante, en contradiction avec l'hypothèse que f est une bijection.

S'il s'agit d'un pôle, par le lemme f est un polynôme, et donc un polynôme de degré 1 par bijectivité. □

On notera $\mathbb{D}$ le disque unité et $\mathbb{H}$ le demi-plan supérieur.

Lemme. *Pour toute matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, l'application $h : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ est un automorphisme de $\mathbb{H}$. En particulier,* $\operatorname{Aut}\mathbb{H}$ *agit transitivement sur $\mathbb{H}$.*

Preuve. On a

$$\operatorname{Im}[(az + b)(c\bar{z} + d)] = \operatorname{Im}(adz + bc\bar{z}) = (ad - bc)\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z.$$

On en déduit que
$$\operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2} > 0,$$
ainsi $h(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$. De plus h est inversible, d'inverse $z \mapsto \frac{dz-b}{-cz+a}$. (Le vérifier directement, ou le constater géométriquement pour z réel, puis invoquer le prolongement analytique.)

Dire que $\operatorname{Aut}\mathbb{H}$ agit transitivement sur $\mathbb{H}$ revient à dire que pour tout couple de points $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$, il existe un automorphisme $\varphi \in \operatorname{Aut}\mathbb{H}$ tel que $\varphi(z_1) = z_2$. On montre cette propriété en utilisant les translations horizontales $z \mapsto z + b$ et les homothéties de rapport positif $z \mapsto a^2 z$, qui sont toutes des homographies particulières, associées respectivement à $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Tout d'abord il existe une homothétie h de rapport positif a^2 qui envoie z_1 sur un point de même partie imaginaire que z_2 : il suffit de prendre $a^2 = \frac{\operatorname{Im} z_2}{\operatorname{Im} z_1}$. Ensuite il existe une translation horizontale t (c'est-à-dire de la forme $t\colon z \mapsto z + b$ pour un $b \in \mathbb{R}$) qui envoie ce point sur z_2. L'automorphisme cherché est finalement $\varphi = t \circ h$. □

Attention : pour comprendre la suite il est essentiel d'avoir fait l'exercice proposé en fin du dernier cours, et donc d'avoir compris que composer les homographies revient à multiplier les matrices associées.

Corollaire. *Le groupe* $\operatorname{Aut}(\mathbb{D})$ *contient les applications de la forme*
$$z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta} z + \bar{\alpha}}$$
pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *vérifiant* $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$. *De plus, le groupe* $\operatorname{Aut}(\mathbb{D})$ *agit transitivement sur* $\mathbb{D}$.

Preuve. On transporte les homographies de matrices $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ du lemme précédent par le biholomorphisme entre $\mathbb{H}$ et $\mathbb{D}$ vu dans le cours précédent. Matriciellement :
$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} i(a+d)+c-b & i(a-d)+c+b \\ i(a-d)-(b+c) & i(a+d)+b-c \end{pmatrix} \\ &= i\begin{pmatrix} a+d+i(b-c) & a-d-i(c+b) \\ a-d+i(b+c) & a+d-i(b-c) \end{pmatrix}\end{aligned}$$
est de déterminant $(2i)^2$, donc en divisant par $2i$ on trouve une matrice de déterminant 1 définissant la même homographie, et donc en posant
$$\alpha = \frac{1}{2}(a+d+i(b-c)) \text{ et } \beta = \frac{1}{2}(a-d-i(c+b))$$
on obtient une matrice de la forme attendue.

Réciproquement, toute matrice de cette forme provient d'une matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, en posant
$$a = \operatorname{Re}(\alpha+\beta), \qquad b = \operatorname{Im}(\alpha-\beta), \qquad c = -\operatorname{Im}(\alpha+\beta), \qquad d = \operatorname{Re}(\alpha-\beta).$$

La transitivité de $\operatorname{Aut}(\mathbb{D})$ sur $\mathbb{D}$ découle de la propriété analogue déjà établie sur $\mathbb{H}$. □

Lemme (Schwarz, [Rem91, p. 270])**.** *Toute application holomorphe* $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *fixant l'origine vérifie* $|f(z)| \leqslant |z|$ *pour tout* $z \in \mathbb{D}$, *et* $|f'(0)| \leqslant 1$. *De plus si il existe* $c \in \mathbb{D}$

tel que $|f(c)| = |c|$*, ou si* $|f'(0)| = 1$*, alors* $f(z) = \lambda z$ *est une rotation, pour un certain* λ *de module* 1*.*

Preuve. La condition $f(0) = 0$ implique qu'en posant $g(z) = f(z)/z$ pour $z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$, et $g(0) = f'(0)$, on définit une fonction g holomorphe sur $\mathbb{D}$. Comme $f(z) \in \mathbb{D}$, on a $|g(z)| \leqslant 1/r$ sur tout cercle de rayon $r \in]0,1[$, et donc également sur le disque $D(0,r)$ par le principe du maximum. Ceci étant vrai pour tout $0 < r < 1$, on obtient $|g(z)| \leqslant 1$ sur $\mathbb{D}$, c'est-à-dire $|f(z)| \leqslant |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et $|f'(0)| \leqslant 1$. Le cas d'égalité implique, à nouveau par le principe du maximum, que la fonction g est constante, et dans ce cas nécessairement égale à un complexe λ de module 1. □

Corollaire ([Rem91, p. 269])**.** *Tout automorphisme du disque* $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *tel que* $f(0) = 0$ *est une rotation.*

Preuve. Corollaire direct du lemme de Schwarz, appliqué à f ou f^{-1}. □

Théorème. *Le groupe des automorphismes du disque est*

$$\operatorname{Aut}\mathbb{D} = \left\{\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}};\, |a|^2 - |b|^2 = 1\right\}$$

et celui du demi-plan est

$$\operatorname{Aut}\mathbb{H} = \left\{\frac{az+b}{cz+d};\, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\right\}$$

Preuve. Il suffit de montrer l'énoncé pour $\mathbb{D}$, puis de transporter par le biholomorphisme entre $\mathbb{D}$ et $\mathbb{H}$. Constatons que le groupe des rotations (automorphismes de $\mathbb{D}$ fixant l'origine) est contenu dans le groupe G proposé : prendre $a = e^{i\theta/2}$ de module 1 et $b = 0$. Maintenant soit $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$. Par transitivité il existe $g \in G$ tel que $g \circ f$ fixe l'origine. Mais alors $g \circ f$ est une rotation, et en particulier $g \circ f \in G$. Finalement $f \in G$. □

Remarque. Il est intéressant de méditer sur la stratégie de preuve du théorème ci-dessus, et de se rendre compte qu'on a pu donner une preuve plus simple en montrant *simultanément* le résultat pour $\mathbb{D}$ et pour $\mathbb{H}$. En effet sur $\mathbb{H}$ il était plus facile d'obtenir la transitivité (en utilisant les translations et les homothéties), alors que sur $\mathbb{D}$ il était plus facile de caractériser les automorphismes fixant un point (lemme de Schwarz). Le biholomorphisme entre $\mathbb{D}$ et $\mathbb{H}$ permet de transporter les propriétés entre les deux contextes.

Formule de Green

Notes de cours pour le mardi 21 avril

On commence par une variante de la notion d'intégrale de chemin :

Définition. Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, est un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et P, Q sont des fonctions continues à valeur complexe définies au voisinage de $\gamma[a,b]$, alors on définit l'intégrale de chemin

$$\int_\gamma P dx + Q dy := \int_a^b P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\, dt.$$

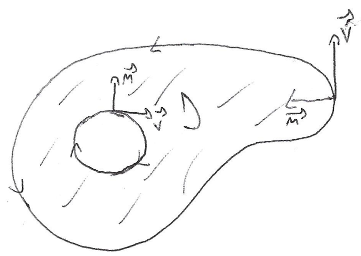
Remarque. Cette définition est essentiellement la même que celle utilisée jusque là, en utilisant l'identification usuelle $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. En effet si $f(z)$ est une fonction de la variable complexe, alors en écrivant $f(z) = u(z) + iv(z)$ et $z = x + iy$ on a

$$f(z)dz = (u + iv)(dx + idy) = (u + iv)dx + (-v + iu)dy.$$

Ainsi en posant $P = u + iv$, $Q = -v + iu$, on a

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Définition. On dit qu'un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ est un domaine si D est connexe borné et que son bord ∂D est une union de lacets $\mathcal{C}^1$ par morceaux, que l'on supposera orientés de façon à ce que le couple de vecteurs (vecteur vitesse, normale rentrante) forme une base directe. Le dessin montre un exemple de domaine avec deux lacets au bord, on a indiqué le couple $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{n})$ en deux points du bord.



On dira qu'une fonction est holomorphe sur $D \cup \partial D$ si f est définie et holomorphe sur un ouvert contenant le fermé (compact) $D \cup \partial D$.

Théorème (Green, [Gam01, p.73], voir aussi [BR14, p.70])**.** *Soient P, Q des fonctions de classes $\mathcal{C}^1$ à valeurs complexes sur un domaine $D \cup \partial D$. Alors*

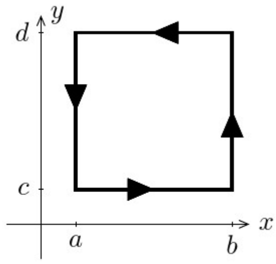
$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$$

Preuve. Considérons le cas où D est un rectangle $[a,b] \times [c,d]$. Alors

$$\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d -\frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b \Big(-P(x,d) + P(x,c) \Big) dx,$$

qui est égal à (remarquer que $x'(t) = 0$ le long d'un segment vertical)

$$\int_{\partial D} P dx = \int_a^b P(t,c)dt - \int_a^b P(t,d)dt.$$

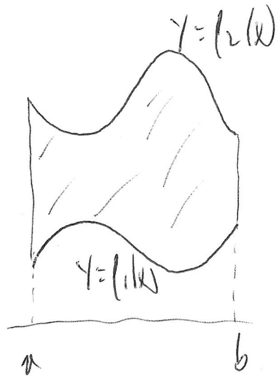


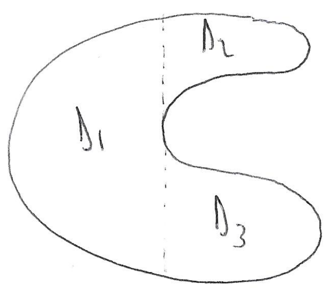
Un calcul similaire s'applique aux termes concernant Q, ce qui donne le théorème dans le cas d'un rectangle.

En fait la même preuve marche pour un domaine pseudo-rectangulaire, defini comme le domaine délimité par les graphes de deux fonctions $f_1 \leqslant f_2$ définies sur $[a, b]$ (un vrai rectangle est $f_1 \equiv c$, $f_2 \equiv d$) :

$$\begin{aligned}
\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy &= \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} -\frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx \\
&= \int_a^b \Big(-P(x, f_2(x)) + P(x, f_1(x)) \Big) dx \\
&= \int_a^b \Big(P(t, f_1(t)) - P(t, f_2(t)) \Big) dt \\
&= \int_{\partial D} P dx
\end{aligned}$$

Finalement tout domaine peut-être découpé en un nombre fini de tels pseudo-rectangles, d'où le résultat. □





un pseudo-rectangle découpage en pseudo-rectangles

Remarque. J'ai écrit cette preuve à partir d'une vidéo de Denis Auroux sur le site du MIT. Donc si vous voulez plus de détail sur la preuve tout en travaillant votre anglais, je vous donne le lien de la vidéo.

Un peu de vocabulaire (que vous reverrez en master...) : L'expression $\omega = Pdx + Qdy$ est appelée une 1-forme, alors que l'expression $d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$ est appelée une 2-forme. La 1-forme $\omega = Pdx + Qdy$ est dite fermée si $dw = 0$, ce qui revient à $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Pour une telle forme le théorème de Green donne

$$\int_{\partial D} \omega = 0.$$

Théorème (Théorème de Cauchy, [Gam01, p.110])**.** *Soit f holomorphe sur $D \cup \partial D$. Alors*

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0.$$

Preuve. Si on écrit $f(z) = u(z)+iv(z)$ où u et v sont les parties réelles et imaginaires de f, on a déjà remarqué que

$$f(z)dz = (u + iv)(dx + idy) = (u + iv)dx + (-v + iu)dy.$$

Comme remarqué ci-dessus, grâce au théorème de Green pour montrer que $\int_{\partial D} f(z)dz = 0$ il suffit de montrer que $f(z)dz$ est une 1-forme fermée. Observons que

$$f(z)dz \text{ fermée } \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}(u + iv) = \frac{\partial}{\partial x}(-v + iu) \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Les conditions à droites sont les conditions de Cauchy-Riemann, qui sont bien satisfaites puisqu'on suppose f holomorphe. □

Par exemple on retrouve le fait que si f est holomorphe au voisinage d'une couronne délimitée par deux cercles γ_1 et γ_2, alors

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

On évite ainsi le pénible argument de “découpage en convexes” vu il y a quelques temps (voir page 1).

On retrouve également une preuve alternative du théorème des résidus :

Théorème (Résidus, [Gam01, p.196])**.** *Soit D un domaine (borné avec bord lisse par morceaux). Si f est holomorphe sur $D \cup \partial D$, sauf en un nombre fini de singularités $z_1, \dots, z_n \in D$. Alors*

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 2i\pi \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_i).$$

Preuve. On enlève de petits disques autour des z_i, et le résultat suit en combinant le théorème de Cauchy sur le nouveau domaine obtenu et le calcul local d'un résidu par intégrale le long d'un petit cercle autour de la singularité. □

Une autre conséquence du théorème de Green :

Proposition (Propriété de la moyenne, [Gam01, p.85])**.** *Soit $u\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique sur un domaine D contenant un disque $\{|z - z_0| < \rho\}$. Alors pour tout $0 < r < \rho$,*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})dt.$$

Preuve. Comme u est harmonique, la forme $-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$ est fermée, et par le théorème de Green sur le disque $|z| \leqslant r$:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{|z-z_0|=r} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy \\
&= r \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos t + \frac{\partial u}{\partial y} \sin t \right) dt \\
&= r \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r}(z_0 + re^{it})\, dt \text{ où } z_0 + re^{it} \simeq (x_0 + r\cos t, y_0 + r \sin t).
\end{aligned}$$

En interchangeant intégrale et dérivée partielle, et en divisant par $2\pi r$ on obtient

$$0 = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})dt\right).$$

Ainsi l'intégrale de l'énoncé ne dépend pas de r, et en faisant tendre $r \to 0$ et par continuité de u en z_0 on obtient le résultat. $\square$

Théorème de Cauchy homotopique

(Cette section est essentiellement tirée de [Mar09, chapitre 24]).

Définition. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $\gamma\colon I \to U$ un chemin continu, et $f\colon U \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Une primitive de f le long de γ est une fonction $F\colon I \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $t_0 \in I$, il existe des voisinages V de t_0 et W de $\gamma(t_0)$ tel que $\gamma(V) \subset W$, et une primitive de F_{t_0} de f sur W, vérifiant $F(t) = F_{t_0}(\gamma(t))$ pour tout $t \in V$.

Proposition. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $\gamma\colon I \to U$ un chemin continu, et $f\colon U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors il existe une primitive de f le long de γ, qui de plus est unique à une constante additive près.*

Preuve. Soit $\delta > 0$ la distance de Image(δ) à $\mathbb{C} \setminus U$. Par compacité on peut recouvrir Image(γ) par un nombre fini de disque $D_i = D(z_i, \delta)$ avec $z_i = \gamma(t_i)$, $t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_s \in I$. Sur chaque ouvert étoilé $D_i \cup D_{i+1}$ il existe une primitive F_i de f, unique à un choix de constante additive près. Fixons un choix de F_1 sur $D_1 \cup D_2$. Alors les autres F_i sont uniquement déterminées par les conditions $F_i = F_{i-1}$ sur D_i. Il suffit alors de poser $F(t) = F_i(\gamma(t))$ pour $t \in [t_i, t_{i+1}]$.

Si F et G sont deux primitives de f le long de γ, alors $F - G$ est localement constante, donc constante sur le connexe I. $\square$

On peut maintenant étendre notre définition d'intégrale de chemin au cas d'un chemin seulement continu, à condition de demander de la régularité sur f :

Définition. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $\gamma\colon [a,b] \to U$ un chemin continu, et $f\colon U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ une primitive de f le long de γ. Alors on définit l'intégrale de f le long de γ par

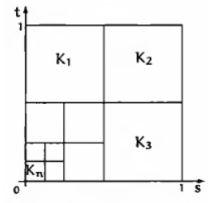
$$\int_\gamma f(z)dz = F(b) - F(a)$$

(grâce à la proposition, la primitive F existe, et l'intégrale ne dépend pas du choix de F).

Théorème (Cauchy homotopique)**.** *Soit $f\colon U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un ouvert U, et γ_0, γ_1 deux lacets homotopes dans U. Alors*

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Preuve. La preuve est un argument de subdivision, similaire à celui utilisé dans la preuve de Goursat. Soit $h(s,t)$ l'homotopie entre les lacets γ_0 et γ_1. On définit un lacet $c\colon [0,4] \to U$ en suivant le bord du carré $[0,1] \times [01]$ sur lequel est défini h :



Précisément :

$$\begin{cases} u \mapsto h(u,0) & \text{si } 0 \leqslant u \leqslant 1 \\ u \mapsto h(1,u-1) = \gamma_1(u-1) & \text{si } 1 \leqslant u \leqslant 2 \\ u \mapsto h(3-u,1) & \text{si } 2 \leqslant u \leqslant 3 \\ u \mapsto h(0,4-u) = \gamma_0(4-u) & \text{si } 3 \leqslant u \leqslant 4 \end{cases}$$

Comme chaque $h(s,\cdot)$ est un lacet, les premier et troisième tronçons sont des chemins opposés, et donc l'intégrale le long de c est égale à l'intégrale sur les deux côtés verticaux :

$$\int_c f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_0} f(z)dz$$

Par l'absurde, supposons cette intégrale non nulle, subdivisons le carré en 4 comme sur la figure, et choisissons l'un des carrés c_1 tel que $\int_c f(z)dz \neq 0$. En itérant le procédé, on produit une suite c_n de carrés emboîtés, pour lesquels $\int_c f(z)dz \neq 0$. Mais pour n assez grand l'image de c_n est incluse dans un disque inclus dans U, et donc $\int_{c_n} f(z)dz = 0$, contradiction. $\square$

On peut conclure ce cours en remarquant que la notion d'ouvert simplement connexe est la notion la plus générale permettant d'avoir le résultat suivant (que l'on avait établi jusque là seulement sur des ouverts convexes, ou étoilés) :

Corollaire. *Soit U un ouvert simplement connexe, $\gamma\colon I \to U$ un lacet, et $f\colon U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors $\int_\gamma f(z)dz = 0$.*

Preuve. Le lacet γ est homotope à un lacet constant γ_0, et donc le théorème de Cauchy homotopique donne

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_0} f(z)dz = 0$$

$\square$

Références

[BR14] Vincent Borrelli et Jean-Luc Rullière : En cheminant avec Kakeya. ÉNS Éditions, 2014. pdf freely available on the webpage of the editor.

[Car61] H. Cartan, éditeur. Théorie élémentaires des fonctions analytiques. Hermann, 1961. Lien vers copie électronique.

[Gam01] Theodore W. Gamelin : Complex analysis. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 2001. Lien vers copie électronique.

[Mar09] J.-P. Marco, éditeur. Mathématiques L3 Analyse. Pearson Education, 2009. Lien vers copie électronique.

[Pab95] Jean-François Pabion : Éléments d'analyse complexe. Ellipse, 1995. Lien vers copie électronique.

[Rem91] Reinhold Remmert : Theory of complex functions, volume 122 de Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1991. Lien vers copie électronique.