Analyse Complexe
Examen final

Durée: 3 heures

Documents, calculatrice ou téléphone interdits. Le barême sur 21 points est donné à titre indicatif.

I - Convergence d'une série de fonctions (4 points)

1. Rappeler les définitions de convergence normale, absolue et uniforme pour une série $\sum_{n\geq 0} f_n(z)$, où les $f_n\colon D \to \mathbb{C}$ sont des fonctions à valeurs complexes, définies sur un même domaine de définition $D \subseteq \mathbb{C}$.

2. Démontrer qu'une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ normalement convergente est uniformément convergente. (*On pourra admettre et utiliser les implications convergence normale* $\implies$ *convergence absolue* $\implies$ *convergence simple*).

3. Donner un exemple de série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ qui converge absolument mais pas normalement sur le disque ouvert unité, en justifiant votre réponse.

II - Lemme de Schwarz (4 points)

Notons $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ le disque unité ouvert, et soit $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe vérifiant $f(0) = 0$.

1. Montrer que la fonction $g\colon z \mapsto f(z)/z$ peut se prolonger en une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ et préciser sa valeur en 0.

2. Montrer que $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, et que $|f'(0)| \leq 1$ (*On pourra commencer par majorer* $|g(z)|$ *sur un cercle centré en 0 et de rayon* $r \in]0,1[$).

3. Que peut-on dire du cas d'égalité dans la question précédente ?

4. En déduire une description explicite du groupe des biholomorphismes de $\mathbb{D}$ fixant 0.

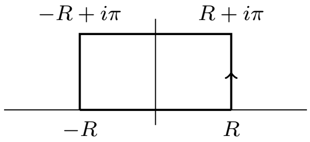
TSVP $\Longrightarrow$

III - Un calcul d'intégrale (6 points)

On rappelle que la fonction cosinus hyperbolique est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, définie par $\cosh(z) = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$. Soit $a \in]-1, 1[$. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\cosh(x)} dx.$$

On notera γ_R le contour rectangulaire de sommets $-R, R, R+i\pi, -R+i\pi$, parcouru une fois dans le sens direct :



1. Déterminer tous les zéros de la fonction $\cosh\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et donner leur ordre.

2. Si f et g sont deux fonctions holomorphes au voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$, et que z_0 est un zéro d'ordre 1 de g, calculer le résidu de la fonction $z \mapsto \frac{f(z)}{g(z)}$ en z_0.

3. Déterminer les pôles de $z \mapsto \frac{e^{az}}{\cosh(z)}$ situés à l'intérieur du contour γ_R, et calculer leur résidus.

4. Calculer $\int_{\gamma_R} \frac{e^{az}}{\cosh(z)} dz$.

5. En estimant les intégrales de chemin sur chacun des 4 segments composant γ_R, montrer que $I = \frac{\pi}{\cos(a\pi/2)}$.

IV - Exemples (7 points)

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$, et $\gamma(t) = e^{it}$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Calculer $\int_\gamma z^n dz$.

2. Donner un exemple de fonction holomorphe $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ admettant un pôle d'ordre 2 en $z = 0$, et avec résidu égal à $2i$ en 0.

3. Donner un exemple de fonction holomorphe $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ admettant une singularité essentielle en $z = 0$, et avec résidu nul en 0.

4. Justifier pourquoi la formule trigonométrique usuelle $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ reste valable pour tout $a \in \mathbb{C}$.

5. Donner un exemple de biholomorphisme du disque unité ouvert $\mathbb{D}$ ne fixant pas l'origine.

6. Dessiner un ouvert connexe $U \subset \mathbb{C}^*$ contenant 1 et -1 sur lequel on puisse définir une branche du logarithme $\ell\colon U \to \mathbb{C}$ vérifiant $\ell(1) = 2i\pi$ et $\ell(-1) = i\pi$.

7. Si $U \subset \mathbb{C}$ est un ouvert convexe et $\gamma\colon [0, 1] \to U$ un lacet, écrire une homotopie entre γ et un lacet constant dans U.