L3 Math ESR 8 mars 2019

Analyse Complexe
Examen partiel

Durée: 2 heures

Documents, calculatrice ou téléphone interdits. Le barême sur 20 points est donné à titre indicatif.

I - Exemples (6 points)

Pour chacune des questions suivantes j'attends une réponse courte mais avec néanmoins à chaque fois deux ou trois phrases de justification précise.

1. Calculer le rayon de convergence de la série
$$\sum_{n\geq 1} z^{n!} = z + z^2 + z^6 + z^{24} + z^{120} + \dots$$
2. Dessiner un lacet γ tel que la fonction $z \mapsto \mathrm{Ind}_\gamma(z)$ prenne la valeur 3 sur l'une des composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Image}(\gamma)$. Est-il possible que de plus $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Image}(\gamma)$ admette exactement deux composantes connexes ?
3. Si γ est le lacet orienté dans le sens direct et parcourant une fois l'ellipse d'équation $3x^2 + 2y^2 = 1$, et si $f(z) = 1/z^2$, calculer $\int_\gamma f(z)dz$.
4. Soit $k \geq 0$ un entier. Quelles sont les fonctions holomorphes $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dont la $k$ème dérivée $f^{(k)}$ est de module borné ?

II - Lemme d'Abel (6 points)

Soit $S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière.

1. Rappeler les définitions de convergences normale et absolue pour la série $S(z)$.
2. On suppose que la suite $(|a_n w^n|)_{n\geq 0}$ est bornée pour un certain $w \in \mathbb{C}$. Montrer que la série $S(z)$ est normalement convergente sur tout disque fermé $\bar{D}(0,\rho)$ de rayon $\rho < |w|$. [*On attend que vous redonniez l'argument de la preuve du lemme d'Abel*].
3. Un exemple : la série $\sum_{n\geq 1} z^n$ est-elle normalement convergente sur le disque ouvert $D(0,1)$? Est-elle absolument convergente sur ce même disque ?
4. Une application : si la série $S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ admet R pour rayon de convergence, montrer que le rayon de convergence de la série $T(z) = \sum_{n\geq 0} a_{n+1} z^n$ est aussi R.

III - Un calcul d'intégrale (8 points)

Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$$

1. Si $\gamma \colon [a,b] \to \mathbb{C}$ est un lacet C^1 par morceaux, et z est un complexe non contenu dans le support de γ, rappeler la définition de l'indice $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ du lacet γ par rapport au point z.

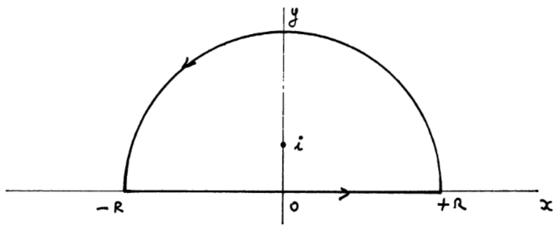
2. Rappeler les hypothèses et l'énoncé précis de la formule de Cauchy, qui relie la valeur d'une fonction f en un point z avec une intégrale de chemin $\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw$.

3. Montrer que pour $R > 0$, l'intégrale

$$\int_{-R}^{+R} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx$$

   est de partie imaginaire nulle, et que sa partie réelle tend vers I quand $R \to \infty$.

Pour un réel $R > 1$, on notera Γ_R le lacet dessiné ci-dessous, concaténation du segment $[-R, R]$ et d'un demi-cercle γ_R :



4. Exprimer la fraction rationnelle $\frac{1}{1+z^2}$ comme une combinaison linéaire de $\frac{1}{z-i}$ et $\frac{1}{z+i}$.

5. A l'aide de la formule de Cauchy et des questions précédentes, montrer que

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = \frac{\pi}{e}$$

6. Montrer que l'intégrale de cette même fonction sur le demi-cercle γ_R vérifie

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz \right| = 0.$$

7. Conclure.

IV - Question subsidiaire (hors barême)

Cette question est hors barême, à ne traiter que si vous avez fini tout le reste...

Montrer que la fonction $f(z) = |z|$ n'est dérivable en aucun point $z_0 \in \mathbb{C}$.