Licence de mathématiques L3 — Mai 2012

Université Paul Sabatier

Corrigé de l'examen terminal

I - Un théorème de Sylow (8 points).

1. Supposons qu'une action de S_1 sur G/S n'admette pas de point fixe et cherchons une contradiction. S_1 est d'ordre p^a et $|G/S| = m$. Si $xS \in G/S$, la formule des classes s'écrit
$$|Orb(xS)| \cdot |Stab(xS)| = p^a.$$
On a donc $|Orb(x)| = p^b$ avec $1 \leq b \leq a$, d'où $|Orb(x)| \equiv 0 \bmod p$ et $m = |G/S| \equiv 0 \bmod p$ ce qui contredit m premier avec p.

2. On considère l'action
$$\begin{array}{c} S_1 \times G/S \to G/S \\ g\ ,\quad xS \to gxS \end{array}$$
Par la question précédente, il existe une classe xS fixe, c'est à dire que pour tout $g \in S_1$, $gxS = xS$. Cela équivaut à $x^{-1}gx \in S$, ou encore à $g \in xSx^{-1}$ pour tout $g \in S_1$, autrement dit $S_1 \subset xSx^{-1}$.

3. Si S et S_1 sont deux p-sous-groupes de Sylow de G, on peut appliquer la question précédente et obtenir qu'il existe $x \in G$ tel que $S_1 \subset xSx^{-1}$. Comme de plus S_1 et xSx^{-1} ont même cardinal, cette inclusion est une égalité.

4. On considère l'action
$$\begin{array}{ccccc} G \times \{p\text{-Sylow de } G\} & \to & \{p\text{-Sylow de } G\} \\ g \quad , \quad S & \to & gSg^{-1} \end{array}$$
Par la question précédente, cette action admet une seule orbite (l'action est transitive), la formule des classes donne
$$|Orb(S)| \cdot |Stab(S)| = |G|$$
avec $|G| = p^n m$ et p^n qui divise $|Stab(S)|$ (car S est un sous-groupe de $|Stab(S)|$). Le nombre de p-sous-groupes de Sylow de G (qui est égal à $|Orb(S)|$) divise donc m.

5. Si $S \subset N_G(S')$, alors S est un p-sous-groupe de Sylow de $N_G(S')$. Par la question 3., il existe $x \in N_G(S')$ tel que $S = xS'x^{-1}$. Par définition même de $N_G(S')$, cela donne $S = S'$.

6. On considère l'action
$$\begin{array}{ccccc} S \times \{p\text{-Sylow de } G\} & \to & \{p\text{-Sylow de } G\} \\ g \quad , \quad S' & \to & gS'g^{-1} \end{array}$$
Par la question précédente, si S' est fixe, ce qui revient à dire que $S \subset N_G(S')$, on a $S = S'$.

7. Le seul point fixe est $S' = S$, donc les orbites sont toutes de cardinal une puissance de p sauf cette orbite singleton. En écrivant $\{p\text{-Sylow de } G\}$ comme union disjointe des orbites, on obtient que le cardinal de l'ensemble $\{p\text{-Sylow de } G\}$ est congru à 1 modulo p.

8. Le nombre de 3-Sylow de G (autrement dit le nombre de sous-groupes d'ordre 9) divise 5 par la question 4, et est congru à 1 modulo 3 par la question précédente. On conclut qu'un groupe G d'ordre 45 admet un unique sous-groupes d'ordre 9.

II - Le groupe A_4 (6 points).

1. $|A_4| = 12$, et l'ensemble X des 3-cycles est de cardinal 8. La formule des classes pour un 3-cycle σ s'écrit $|Orb(\sigma)|\cdot|Stab(\sigma)| = 12$ avec $|Stab(\sigma)|$ multiple de 3, d'où $|Orb(\sigma)|$ divise 4. En considérant l'action de S_4 sur X on voit que $Stab(\sigma)$ est exactement de cardinal 3, et donc $|Orb(\sigma)| = 4$. Finalement il y a deux classes de conjugaison de 3-cycles dans A_4, chacune de cardinal 4.

2. Les quatre classes de conjugaisons dans A_4 sont : l'identité, les deux classes de 3-cycles trouvées à la question précédente, la classe des double-transposition.

3. A part le sous-groupe trivial (ordre 1) et le groupe A_4 (ordre 12), les sous-groupes de A_4 ont un ordre dans $\{2,3,4,6\}$.

   - Sous-groupe d'ordre 2 : ce sont les sous-groupes engendrés par une double transposition, il y en a trois.
   - Sous-groupe d'ordre 3 : ce sont les sous-groupes engendrés par un 3-cycle, il y en a quatre (puisque chacun contient deux 3-cycles inverses l'un de l'autre).
   - Sous-groupe d'ordre 4 : par Lagrange, ne peut contenir de 3-cycles, ainsi l'unique possibilité est le sous-groupe de Klein K contenant l'identité et les trois double-transpositions.
   - Sous-groupe d'ordre 6 : Si H est un sous-groupe d'ordre 6 de A_4, alors H est isomorphe à S_3 (H ne peut être cyclique puisqu'il n'y a pas d'éléments d'ordre 6 dans A_4), en particulier H contient trois éléments d'ordre 2 qui sont forcément les doubles transpositions. On aurait alors $K \subset H$, ce qui contredit Lagrange (4 ne divise pas 6).

   Il y a donc au total 10 sous-groupes dans A_4, dont trois sont distingués : $\{id\}$, A_4 et K.

4. Tout d'abord $(123), (12)(34)$ et $(14)(23)$ forment un système de générateurs pour A_4 : $(12)(34)$ et $(14)(23)$ engendre K, donc le groupe engendré par les trois éléments est d'ordre multiple de 4 et 3. Ceci prouve que le morphisme φ est surjectif. Le noyau de ϕ contient clairement a^3, b^2 et c^2. Comme $(12)(34)(14)(23) = (13)(24)$, on a $(bc)^2 \in \text{Ker}\ \varphi$. De même, comme $(123)(12)(34)(132) = (14)(23)$, on a $aba^{-1}c^{-1} \in \text{Ker}\ \varphi$.

   Considérons H le plus petit sous-groupe distingué de F_3 contenant $a^3, b^2, c^2, (bc)^2$ et $aba^{-1}c^{-1}$. Dans le quotient F_3/H on a (les barres dénotent des classes) $\overline{b}\overline{c} = \overline{c}\overline{b}$ et $\overline{a}\overline{b} = \overline{c}\overline{a}$; on en déduit[1] que tout élément de F_3/H s'écrit sous la forme $\overline{a}^i\overline{b}^j\overline{c}^k$ avec $0 \le i \le 2$, $0 \le j,k \le 1$. Ainsi $|F_3/H| \le 12$, mais comme F_3/H se surjecte sur A_4 on a finalement $|F_3/H| = 12$ et $F_3/H = F_3/\text{Ker}\ \varphi$ isomorphe à A_4. Autrement dit, une présentation de A_4 est donné par

   $$\langle a, b, c;\ a^3, b^2, c^2, (bc)^2, aba^{-1}c^{-1}\rangle.$$

5. Le nombre de drapeaux de $\mathcal{T}$ est égal à 24 (4 fois le nombre d'arêtes), ainsi le groupe des isométries préservant $\mathcal{T}$ est d'ordre 24 : comme de plus le groupe s'identifie à un sous-groupe de S_4 puisqu'il permute les sommets de $\mathcal{T}$, on conclut que Isom $\mathcal{T}$ est isomorphe à S_4.

   Le groupe $\text{Isom}^+\ \mathcal{T}$ des rotations de $\mathbb{R}^3$ préservant $\mathcal{T}$ est alors isomorphe à A_4, comme unique sous-groupe d'indice 2 de S_4.

6. - Identité : rotation identité.
   - (123) et (132): rotations d'angle $\pm\frac{2\pi}{3}$ et d'axe passant par le sommet 4 et le milieu de la face de sommets 1,2,3.

[1] Problème ici, il faut une 6ème relation, par exemple $ba = abc$, pour que la suite soit correcte...

- $(12)(34)$: rotation d'angle π et d'axe passant par les milieus des arêtes 1,2 et 3,4.

III - Quizz (8 points).

1. Tout groupe commutatif est cyclique : faux. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est commutatif mais non cyclique.

2. Les groupes $4\mathbb{Z}$ et $13\mathbb{Z}$ sont isomorphes : vrai. Ils sont tous deux isomorphes à $\mathbb{Z}$; un isomorphisme consiste à envoyer $4n$ sur $13n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

3. Si H est un sous-groupe d'un groupe commutatif G, alors G est isomorphe au produit direct $(G/H) \times H$: faux. Prendre $G = \mathbb{Z}$ et $H = 2\mathbb{Z}$, alors $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$ contient un élément d'ordre 2 mais pas $\mathbb{Z}$.

4. A isomorphisme près, il existe exactement deux groupes commutatifs d'ordre 12 : vrai. Comme $12 = 2.2.3$, les deux groupes d'ordre 12 sont $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

5. Les permutations $(12)(654)$ et $(135)(72)$ sont conjuguées dans le groupe symétrique S_7 : vrai. Ils sont conjugués car les ordres des cycles correspondent; explicitement
$$(12)(654) = (471)(36) \cdot (135)(72) \cdot (417)(36).$$

6. Si G_1 est distingué dans G_2 et G_2 est distingué dans G_3, alors G_1 est distingué dans G_3 : faux. Prendre $G_3 = A_4$, $G_2 = K$ le groupe de Klein, et G_1 le groupe d'ordre 2 engendré par $(12)(34)$.

7. Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ est d'ordre 240 : faux. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ est d'ordre 24.20 = 480, et comme il y a quatre déterminants non nuls possibles (± 1 et ± 2) on a $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ d'ordre $480/4 = 120$.

8. $\langle a, b;\ a^2, b^3, abab^{-1} \rangle$ est une présentation du groupe $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$: vrai. Au niveau des classes $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$, ainsi le groupe est commutatif, admet au plus 6 éléments et se surjecte sur $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.