Examen final - Corrigé

I - Exemples. (7 points)

1. Donner deux exemples typiques d'anneaux euclidiens.

   SOLUTION. (**1 point**)
   $\mathbb{Z}$ et $K[X]$, avec K un corps.

2. Donner deux exemples typiques d'anneaux factoriels mais non principaux, en donnant à chaque fois un exemple d'idéal non principal (on ne demande pas de justifier).

   SOLUTION. (**1 point**)
   $\mathbb{Z}[X]$ avec l'idéal $(2, X)$, et $K[X, Y]$ avec l'idéal (X, Y) (où K est un corps).

3. L'anneau quotient $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]/(X^2+\bar{1})$ est-il un exemple de corps à 4 éléments ?

   SOLUTION. (**1 point**)
   C'est un anneau à 4 élément, mais pas un corps car non intègre. En effet, $X^2 + \bar{1} = (X + \bar{1})^2$ dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$, et donc la classe de $X + \bar{1}$ est un diviseur de zéro.

4. Donner un exemple d'anneau commutatif dont tous les idéaux sont principaux, et qui pourtant n'est pas un anneau principal.

   SOLUTION. (**1 point**)
   $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ admet pour idéaux $(\bar{2})$ et $(\bar{3})$ (en plus de l'idéal nul et de l'anneau entier), pourtant il n'est pas principal car non intègre.

5. Dans l'anneau $\mathbb{R}[[T]]$ des séries formelles à coefficients réels, donner un exemple d'élément non nul et non inversible.

   SOLUTION. (**1 point**)
   T convient, comme toute série formelle de coefficient constant nul.

6. Expliciter le polynôme cyclotomique $\Phi_{11}(X) \in \mathbb{Z}[X]$.

   SOLUTION. (**1 point**)
   $\Phi_{11}(X) = \dfrac{X^{11} - 1}{X - 1} = X^{10} + X^9 + X^8 + \cdots + X + 1$

7. Donner une base de l'espace des polynômes homogènes de degré 2 dans $\mathbb{C}[X,Y]$, puis une base de l'espace des polynômes homogènes *symétriques* de degré 2 dans $\mathbb{C}[X,Y]$.

SOLUTION. (**1 point**)
X^2, XY et Y^2 forment une base de l'espace des polynômes homogènes de degré 2 dans $\mathbb{C}[X,Y]$. X^2+Y^2 et XY forment une base de l'espace des polynômes homogènes symétriques de degré 2 dans $\mathbb{C}[X,Y]$.

II - Questions de cours (7 points)

1. Démontrer qu'un anneau euclidien est principal.

SOLUTION. (**1.5 points**)
Soit I un idéal d'un anneau euclidien A de stathme g. Soit $a \in I$ un élément réalisant le minimum des $g(x)$, $x \in I \setminus \{0\}$. Si $b \in I$, on écrit la division euclidienne $b = aq+r$. Si $r \neq 0$, on aurait $g(r) < g(a)$ et $r \in I$ en contradiction avec la minimalité de a. Donc $r = 0$, ainsi $b \in (a)$, ce qui montre que $I = (a)$ est principal.

2. Considérons les six anneaux suivants :

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R},\ \mathbb{C},\ \mathbb{R}[X]/(X^2+1),\ \mathbb{R}[X]/(X^2),\ \mathbb{R}[X]/(X^2+X),\ \mathbb{R}[X]/(X^2-1).$$

Établir ceux qui sont isomorphes, en explicitant les isomorphismes, et en justifiant que votre liste d'isomorphismes est complète.

SOLUTION. (**2 points**)
Le théorème d'isomorphisme appliqué à $P(X) \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(i) \in \mathbb{C}$ donne un isomorphisme entre $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ et $\mathbb{C}$. De même le théorème d'isomorphisme appliqué à $P(X) \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(0), P(-1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ d'une part, et à $P(X) \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(1), P(-1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ d'autre part, donne des isomorphismes $\mathbb{R}[X]/(X^2+X) \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}[X]/(X^2-1)$. Ces anneaux sont non intègres, donc non isomorphes au corps $\mathbb{C}$. Enfin, l'anneau $\mathbb{R}[X]/(X^2)$ contient un élément de carré nul (la classe de X), donc n'est isomorphe à aucun des anneaux précédents. En résumé :

- $\mathbb{R}[X]/(X^2+1) \simeq \mathbb{C}$;
- $\mathbb{R}[X]/(X^2+X) \simeq \mathbb{R}[X]/(X^2-1) \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

3. Factoriser 10 puis $10i$ en facteurs irréductibles dans l'anneau $\mathbb{Z}[i]$.

SOLUTION. (**1 point**)
$10 = 2.5 = (1+i)(1-i)(1+2i)(1-2i)$.

En effet chacun des facteurs est un élément de $\mathbb{Z}[i]$ de norme un nombre premier (2 ou 5), il est donc irréductible.

Par ailleurs comme i est un inversible de $\mathbb{Z}[i]$, on peut par exemple multiplier le premier facteur pour trouver un irréductible associé, et obtenir $10i = (i-1)(1-i)(1+2i)(1-2i)$

4. Si $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ sont deux polynômes de contenu égal à 1, montrer que le produit PQ est encore de contenu égal à 1.

   SOLUTION. (**1 point**)
   Supposons que p soit un facteur premier commun aux coefficients de PQ. On réduit modulo p, pour obtenir $\bar{P}\bar{Q} = 0$ dans l'anneau intègre $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$. Donc l'un des deux facteurs est nul, ce qui veut dire que P ou Q a tous ses coefficients multiples de p, en contradiction avec l'hypothèse.

   NB: Ce résultat est l'étape principale pour aboutir à la formule générale $Cont(PQ) = Cont(P)Cont(Q)$, il ne s'agissait donc pas de citer ce résultat du cours (argument circulaire...), mais bien de redonner la preuve ci-dessus.

5. Soit A un anneau commutatif intègre. Montrer que si $a \in A$ est premier alors a est irréductible (on commencera par énoncer les définitions de ces deux notions).

   SOLUTION. (**1.5 points**)
   On dit que $a \in A$ est premier si $a|bc$ implique $a|b$ ou $a|c$. On dit que $a \in A$ est irréductible si $a = bc$ implique b ou c inversible. Supposons a premier, et $a = bc$, on veut montrer b ou c inversible. Comme a est premier, l'un des facteurs, disons b, est multiple de a : on peut écrire $b = ka$. Mais alors $a = akc$, et donc comme A est intègre $1 = kc$, donc c est inversible comme attendu.

III - Polynômes (7 points)

1. Énoncer (sans la démontrer) une condition sur un polynôme $Q \in \mathbb{Z}[X]$ pour avoir l'équivalence : "Q irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ si et seulement si Q est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$", et donner un contre-exemple quand cette condition n'est pas satisfaite.

   SOLUTION. (**1 point**)
   Il suffit d'avoir Q primitif (c'est-à-dire de contenu 1). Un contre-exemple est donné par $Q = 2X + 2 = 2(X + 1)$, avec 2 et $X + 1$ qui sont irréductibles sur $\mathbb{Z}$ (alors que 2 est inversible, donc non irréductible, sur $\mathbb{Q}$).

2. Montrer que le polynôme $X^3 + X \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$ admet trois racines.

   SOLUTION. (**0.5 points**)
   On vérifie que $0, 2$ et -2 sont racines.

3. Le polynôme $P(X) = X^3 - 5X^2 + 11X - 4$ est-il irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$?

   SOLUTION. (**1.5 points**)
   On réduit le polynôme P modulo 5, pour obtenir

$$\bar{P} = X^3 - \bar{5}X^2 + \bar{1}1X - \bar{4} = X^3 + X + \bar{1}.$$

   Comme $\bar{P}$ est de degré 3, il est réductible ssi il admet une racine dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. On vérifie facilement (une partie du travail a été fait dans la question précédente) qu'aucune des valeurs $\bar{0}, \pm\bar{1}, \pm\bar{2}$ n'est racine.

Soit $\phi\colon \mathbb{Z}[X] \to (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ le morphisme qui consiste à réduire les coefficients d'un polynôme modulo 3. Dans les questions qui suivent on considère le polynôme $\bar{P} = \phi(P)$, où P est le polynôme de la question précédente.

4. Donner la décomposition en facteurs irréductibles de $\bar{P}$ dans $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$.

   SOLUTION. (**1.5 points**)
   Dans $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$, on a

$$\bar{P} = X^3 + X^2 - X - \bar{1} = (X - \bar{1})(X^2 + \bar{2}X + \bar{1}) = (X - \bar{1})(X + \bar{1})^2$$

5. Quel est le cardinal de l'anneau quotient $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]/(\bar{P})$?

   SOLUTION. (**1 point**)
   Les éléments du quotients sont donnés par des représentants de degré au plus 2, donc de la forme $\bar{a}X^2 + \bar{b}X + \bar{c}$, on a donc $3^3 = 27$ choix possibles.

6. Déterminer tous les éléments $a \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]/(\bar{P})$ vérifiant $a^2 = 0$.

   SOLUTION. (**1.5 points**)
   Si a est représenté par un polynôme R de degré au plus 2, alors $a^2 = 0$ signifie que R^2 est un multiple de $(X - \bar{1})(X + \bar{1})^2$. Un tel polynôme R est multiple de $(X - \bar{1})(X + \bar{1})$, donc de la forme $\bar{a}(X - \bar{1})(X + \bar{1})$: il y a trois choix (dont l'élément nul).