Géométrie affine et euclidienne

1 Espaces euclidiens et isométries des solides platoniciens

Exercice 1. On munit l'espace affine euclidien $(E, \mathcal{E})$ d'un repère orthonormé $(A, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

1. Montrer que l'application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, définie dans ce repère par
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}z \\ \frac{-\sqrt{2}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + 2 \\ \frac{-\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z - 1 \end{pmatrix}.$$
est une isométrie affine.
2. Précisez sa décomposition canonique : on pourra commencer par donner les points fixes de l'application linéaire associée. Ensuite, on rappelle que le vecteur de la translation cherchée est donné par la projection orthogonale de $\overrightarrow{Af(A)}$ sur $\ker(f - \mathrm{id}_E)$ (qui est $\ker(f - id_E)^{\perp}$?). Justifier votre réponse finale.
3. En déduire la nature de l'isométrie (donner toutes ses caractéristiques intéressantes).

Exercice 2. On munit l'espace affine euclidien $(E, \mathcal{E})$ d'un repère orthonormé $(A, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Donner l'expression de la symétrie orthogonale f par rapport au plan $\mathcal{P}$ issue de $B(2, 0 - 2)$ et de direction othogonale à $\vec{v} = 2\vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{e_3}$.

Exercice 3. Montrer que deux symétries orthogonales distinctes du plan euclidien commutent si, et seulement si, leurs axes de symétrie sont orthogonaux.

Exercice 4. En considérant le tétraèdre et son groupe d'isométries, montrer qu'il y a un morphisme surjectif de S_4 dans S_3.

Exercice 5. En considérant le cube et son groupe d'isométries directes, montrer qu'il n'y a que 3 sous-groupes distincts d'ordre 8 dans S_4.

Exercice 6. Combien y a t-il de sous-groupes distincts

1. d'ordre 3 dans A_4 ? (Tétraèdre)
2. d'ordre 3 dans S_4 ? (Cube ou octaèdre)
3. d'ordre 5 dans A_5 ? (Icosaèdre)

Exercice 7. Groupes d'isométries des quadrilatères

1. Pourquoi est-il évident *a priori* que tous les carrés ont des groupes d'isométries isomorphes ?
2. Pourquoi il n'est pas clair *a priori* que tous les rectangles ont des groupes d'isométries isomorphes ?
3. Pourquoi peut-on affirmer *a priori* que les groupes d'isométries des rectangles, parallelogrammes et losanges sont des sous-groupes d'isométries du carré ?

Exercice 8. Soit X un solide platonicien, on note S son nombre de sommets, A son nombre d'arrêtes, F son nombre de faces et $\{p, q\}$ son symbole de Schläfli. On considère son groupe d'isométries directes $\mathrm{Is}^+(X)$. Expliquer les relations suivantes :

1. $|\mathrm{Is}^+(X)| = Sq$;
2. $|\mathrm{Is}^+(X)| = Fp$;
3. $|\mathrm{Is}^+(X)| = 2A$.

2 Barycentre et convexité

Exercice 9. Soit $\mathcal{E}$ un espaces affine sur un $\mathbb{R}$–espace vectoriel E et $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application affine. Montrer que si f^n a un point fixe alors f en a un.

Exercice 10. (*Ellipse de Steiner*) Soit ABC un triangle du plan affine, et A', B' et C' les milieux des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement. Montrer qu'il existe une ellipse tritangente (i.e. dont les côtés du triangle sont tangents) passant par A', B' et C'.

Exercice 11. Soit un entier n supérieur à 1. Quel est l'isobarycentre des racines primitives n–ième de l'unité dans $\mathbb{C}$?

Exercice 12. Soit $\mathcal{E}$ un espaces affine sur un $\mathbb{R}$–espace vectoriel E. On considère 3 points A, B et C de $\mathcal{E}$ et $\sigma = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha + \beta + \gamma \neq -1$. On note $f_\sigma : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ l'application

$$f_\sigma(M) = \mathrm{bar}[(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma), (M, 1)].$$

1. Montrer que f_σ est affine. Selon les valeurs de σ préciser sa nature.
2. Soit $\vec{a} \in E$, existe-t-il $\sigma \in \mathbb{R}^3$ tel que $f_\sigma = t_{\vec{a}}$?
3. Soit $P \in \mathcal{E}$ et $\lambda\mathbb{R}\backslash\{0\}$, existe-t-il $\sigma \in \mathbb{R}^3$ tel que f_σ soit l'homothetie de centre P et rapport λ ?

Exercice 13. (*Théorème de Ménélaüs*)

1. On considère un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension n et $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ un repère affine. Montrer que $n + 1$ points $P_0, P_1, \dots, P_n$ de $\mathcal{E}$ sont liés si et seulement si le déterminant des coordonnées barycentriques de $P_0, P_1, \dots, P_n$ est nul.
2. Dans le plan $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$, muni du repère affine (A_0, A_1, A_2), soient $A \neq B$, de coordonnées barycentriques respectives $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ et $(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$. Quelle relation doit lier les coordonnées barycentriques (x_1, x_2, x_3) d'un point M pour qu'il soit sur la droite (AB) ?
3. Démontrer le Théorème de Ménélaüs : Soient 3 points M_0, M_1 et M_2 de $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$ situés respectivement sur les droite (A_1A_2), (A_2A_0) et (A_0A_1) et qui ne sont pas des sommets du triangle $A_0A_1A_2$, alors M_0, M_1 et M_2 sont alignés si et seulement si

$$1 = \frac{\overline{M_0A_2}}{\overline{M_0A_1}} \cdot \frac{\overline{M_1A_0}}{\overline{M_1A_2}} \cdot \frac{\overline{M_2A_1}}{\overline{M_2A_0}}.$$

Exercice 14. Dans un espace vectoriel euclidien E, déterminer l'ensemble X des points extrémaux de la boule unité B. Montrer que B est l'enveloppe convexe de X.

Exercice 15. Soit $\mathcal{E}$ un espaces affine de dimension n sur un $\mathbb{R}$–espace vectoriel E et $C \subset \mathcal{E}$ une partie convexe. Une fonction $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ est convexe si pour tout $M, N \in C$ et $\lambda \in [0, 1]$ on a

$$f(\mathrm{bar}((M, 1-\lambda), (N, \lambda)) \leq (1-\lambda)f(M) + \lambda f(N).$$

On dit que f est strictement convexe si l'inégalité est stricte avec $\lambda \in]0, 1[$.

1. Montrer que f est convexe si et seulement si $\Omega_f = \{(M, t) \mid f(M) \leq t\}$ est une partie convexe de $\mathcal{E} \times \mathbb{R}$.
2. Si f est strictement convexe alors tout point de graphe de f est un point extrémal de Ω_f.