

# Non-rationalité d'une quartique lisse de $\mathbb{P}^4$

Stéphane LAMY

## Résumé

Le but ultime du cours sera de démontrer qu'une hypersurface lisse de degré 4 dans l'espace projectif complexe  $\mathbb{P}^4$  n'est pas rationnelle. Il s'agit d'un résultat fameux d'Iskovskikh et Manin [IM71] du début des années 70, qui a été l'un des points de départ de l'étude systématique des variétés algébriques en dimension au moins 3.

La plus grande partie du cours portera cependant sur l'étude de transformations birationnelles entre surfaces, afin d'éclairer le résultat en dimension 3.

## Principaux résultats démontrés dans le cours :

- Théorie de l'intersection sur une surface projective lisse [Sha94, Chapter IV 1.] ;
- Factorisation d'une transformation birationnelle entre surfaces à l'aide d'éclatements [Sha94, Chapter IV 3.] ;
- Théorème de Castelnuovo-Noether donnant des générateurs du groupe des transformations birationnelles de  $\mathbb{P}^2$  [KSC04, §2.5 p. 49] ;
- Rationalité d'une surface cubique lisse de  $\mathbb{P}^3$  [Har77, Bea78, Rei88] ;
- Non-rationalité d'une quartique lisse de  $\mathbb{P}^4$  [Puk07].

## Références

- [Bea78] A. Beauville. *Surfaces algébriques complexes*. Société Mathématique de France, Paris, 1978. Astérisque, No. 54.
- [Har77] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [IM71] V. A. Iskovskikh and J. I. Manin. Three-dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem. *Mat. Sb. (N.S.)*, 86(128) :140–166, 1971.
- [KSC04] J. Kollár, K. E. Smith, and A. Corti. *Rational and nearly rational varieties*, volume 92 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [Puk07] A. V. Pukhlikov. Birationally rigid varieties. I. Fano varieties. *Uspekhi Mat. Nauk*, 62(5(377)) :15–106, 2007.
- [Rei88] M. Reid. *Undergraduate algebraic geometry*, volume 12 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [Sha94] I. R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry. I*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1994. Varieties in projective space, Translated from the 1988 Russian edition and with notes by Miles Reid.

## Liste des exercices

- Exercice 1 : compactification et singularités d'une courbe affine.
- Exercice 2 : intersection de courbes dans  $\mathbb{P}^2$ .
- Exercice 3 : paramétrisation de coniques.
- Exercice 4 : application quadratique standard.
- Exercice 5 : quadriques de  $\mathbb{P}^3$ .
- Exercice 6 : courbe cubique cuspidale.
- Exercice 7 : courbe cubique gauche.
- Exercice 8 : fonctions rationnelles sur une conique.
- Exercice 9 : automorphismes de  $\mathbb{P}^2$ .
- Exercice 10 : cartes d'un éclatement.
- Exercice 11 : éclatement réel.
- Exercice 12 : factorisation en éclatements.
- Exercice 13 : désingularisation de courbes.
- Exercice 14 : groupe de Picard d'un éclatement.
- Exercice 15 : groupe de Picard et diviseur canonique d'une  $\mathbb{F}_n$ .
- Exercice 16 : multiplicité d'un point infiniment proche.
- Exercice 17 : transformations quadratiques.
- Exercice 18 : Noether-Castelnuovo sur un exemple cubique.
- Exercice 19 : conique par cinq points.
- Exercice 20 : cubiques par huit points.

## 1 Introduction

Exercices d'échauffement :

*Exercice 1.* Soient  $C = \mathbb{V}(Y - X^3) \subset \mathbb{C}^2$  (i.e  $C$  est égale au lieu des zéros du polynôme  $Y - X^3$ ) et  $\bar{C} \subset \mathbb{P}^2$  la courbe projective correspondante. Quel est le polynôme homogène qui définit  $\bar{C}$  ? Quels sont les points singuliers de  $\bar{C}$  ?

*Exercice 2.* Trouver les points d'intersection dans  $\mathbb{P}^2$  des courbes suivantes (définies sur  $\mathbb{C}^2$  de coordonnées  $x, y$ ) :

1. les droites  $y = 1$  et  $y = 2$ .
2. la droite  $x = 0$  et la parabole  $y = x^2$ .
3. Les "cercles" de rayon 2 centrés respectivement en  $(-1, 0)$  et  $(1, 0)$ .

*Exercice 3.* Dans  $\mathbb{P}^2$  de coordonnées homogènes  $[X : Y : Z]$  on identifie le plan  $\mathbb{C}^2$  de coordonnées  $x, y$  à la carte  $Z \neq 0$ .

Soient  $C_1 = \{y^2 - x = 0\}$ ,  $C_2 = \{xy - 1 = 0\}$ , et  $\bar{C}_1, \bar{C}_2$  les courbes projectives correspondantes.

1. Ecrire les équations homogènes qui définissent  $\bar{C}_1$  et  $\bar{C}_2$  et déterminer  $\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2$ .
2. Soit  $p = [0 : 0 : 1]$  et  $\bar{D} = \{Z = 0\}$  la droite à l'infini. On considère l'application

$$f : [a : b : 0] \in \bar{D} \rightarrow [f_1 : f_2 : f_3] \in \bar{C}_1$$

qui à tout point  $q \in \bar{D}$  associe le point d'intersection de  $\bar{C}_1$  avec la droite passant par  $p$  et  $q$ .

Expliciter  $f_1, f_2$  et  $f_3$  et montrer que  $f$  est bijective.

3. Existe-t-il un automorphisme  $g$  de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  tel que  $g(\bar{C}_1) = \bar{D}$ ? (Si oui expliciter  $g$ , si non donner un court argument).
4. Existe-t-il un automorphisme  $g$  de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  tel que  $g(\bar{C}_1) = \bar{C}_2$ ? (Si oui expliciter  $g$ , si non donner un court argument).

*Exercice 4.* On considère l'application

$$\sigma : [x : y : z] \rightarrow [yz : xz : xy]$$

appelée *application quadratique standard*. Quel est le domaine de définition de  $\sigma$ ? Montrer que  $\sigma$  induit un isomorphisme entre deux ouverts de Zariski. Quel est l'inverse de  $\sigma$ ? Exprimer  $\sigma$  dans la carte affine canonique (i.e. sur  $\mathbb{C}^2 = \{z \neq 0\}$ ). Quelle est l'image d'une droite par  $\sigma$  (plusieurs cas à distinguer)?

*Exercice 5.* Soit  $f : (x, y) \in \mathbb{C}^2 \rightarrow (x, y, xy) \in \mathbb{C}^3$ .

1. Expliciter l'application  $\bar{f} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$  qui prolonge  $f$ .
2. Montrer que l'image  $S$  de  $\bar{f}$  est une surface définie par une équation de degré 2.
3. Expliciter deux familles de droites dans  $\mathbb{P}^3$  qui soient contenues dans  $S$ .
4. Pouvez-vous trouver une surface de  $\mathbb{P}^3$  définie par une équation de degré 2 qui ne soit pas isomorphe à  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ?

*Exercice 6.* Soit  $C = \{y^2 = x^3\} \subset \mathbb{C}^2$ . On dit que  $C$  est une *cubique cuspidale*.

1. Montrer que le point  $p = (0, 0)$  est l'unique point singulier de  $C$ , et dessiner l'allure de la partie réelle de  $C$ .
2. En s'inspirant du cas d'une conique, montrer que la projection  $\pi$  par rapport à  $p$  de  $C$  vers une droite (ne passant pas par  $p$ ) est une bijection.
3. Choisir une droite, et écrire explicitement l'inverse de  $\pi$  : constater que  $\pi$  n'est pas un isomorphisme.

*Exercice 7.* Soit  $f : x \in \mathbb{C} \rightarrow (x^3, x^2, x) \in \mathbb{C}^3$ . On note  $C$  l'image de  $f$ , et  $\bar{C} \in \mathbb{P}^3$  la courbe projective correspondante. On dit que  $\bar{C}$  est une *cubique gauche*.

1. Trouver deux polynômes de degré 2  $P_1, P_2 \in \mathbb{C}[x, y, z]$  tel que  $C = \{P_1 = P_2 = 0\}$ .
2. Expliciter  $\bar{f} : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$  tel que  $\bar{f}(\mathbb{P}^1) = \bar{C}$ .
3. Ecrire les polynômes homogènes  $\bar{P}_1$  et  $\bar{P}_2$ , et montrer que  $\bar{C} \neq \{\bar{P}_1 = \bar{P}_2 = 0\}$ .
4. Trouver un troisième polynôme quadratique  $P_3$  tel que  $\bar{C} = \{\bar{P}_1 = \bar{P}_2 = \bar{P}_3 = 0\}$ .

## 2 Forme d'intersection sur les diviseurs

Référence pour ce chapitre : [Sha94, chap. IV].

Le but de ce chapitre est de montrer qu'il existe une forme bilinéaire sur le groupe de Picard d'une surface projective lisse, correspondant géométriquement à l'intersection entre courbes.

## 2.1 Diviseurs

Soit  $X$  une variété projective lisse.

Un **diviseur** (de Weil)  $D$  est la donnée d'une famille finie d'hypersurfaces  $C_i$  (c'est-à-dire, des sous-variétés de codimension 1) affectées de coefficients entiers  $a_i \in \mathbb{Z}$ . On note souvent un tel diviseur comme une somme :

$$D = \sum_{i=1}^n a_i C_i$$

On a une loi de groupe (notée ici additivement) sur les diviseurs, et on dit qu'un diviseur est **effectif** (noté  $D \geq 0$ ) si tous les  $a_i$  sont positifs ou nuls. Le **support** d'un diviseur est l'union des  $C_i$  (en supposant tous les  $a_i$  non nul).

Sur une variété lisse toute hypersurface est localement donnée par une unique équation : la preuve repose sur le fait que les anneaux locaux  $\mathcal{O}_x$  sont factoriels, voir [Sha94, Theorem 1 p. 108]. On peut donc également voir un diviseur comme une collection d'équation locale  $(U_\alpha, f_\alpha)$  où les  $U_\alpha$  forment un recouvrement d'ouverts (de Zariski) et les  $f_\alpha$  sont des équations rationnelles locales avec des conditions de compatibilités sur les intersections :  $f_\alpha/f_\beta$  à valeurs dans  $\mathbb{C}^*$  sur  $U_\alpha \cap U_\beta$ . C'est le point de vue des diviseurs de Cartier.

Lien avec le point de vue Weil : les  $a_i > 0$  correspondent aux multiplicités des zéros, et les  $a_i < 0$  aux multiplicités des pôles.

Une **fonction rationnelle** sur  $X$  est la donnée d'un morphisme d'un ouvert  $U \subset X$  vers  $\mathbb{P}^1$ . Explicitement une telle fonction rationnelle est toujours de la forme

$$\begin{aligned} f: X \subset \mathbb{P}^n &\dashrightarrow \mathbb{P}^1 \\ [x_0 : \cdots : x_n] &\dashrightarrow [f(x_0, \dots, x_n) : g(x_0, \dots, x_n)] \end{aligned}$$

où  $f, g$  sont des polynômes homogènes de même degré. Cependant cette écriture ne permet pas forcément de repérer l'ouvert maximal de définition de  $f$  (méditer sur l'exercice ci-dessous). Noter en tous cas que  $f$  n'est pas partout définie : il y a un problème potentiel quand  $f = g = 0$ , et plus précisément les points d'indétermination correspondent à l'intersection des zéros de  $f$  avec les pôles de  $f$ , soit un lieu de codimension 2 (s'il est non vide). Une telle fonction  $f$  définit un diviseur (dit **principal**)  $\text{Div}(f) = (f)_0 - (f)_\infty$ .

*Exercice 8.* Considérons la fonction rationnelle

$$\begin{aligned} f: \mathbb{P}^2 &\dashrightarrow \mathbb{P}^1 \\ [x : y : z] &\dashrightarrow [x : z] \end{aligned}$$

1. Quel est l'ouvert de définition de  $f$  ?
2. Montrer que la restriction de  $f$  à la conique  $C$  d'équation  $x^2 - yz = 0$  induit un isomorphisme  $g: C \rightarrow \mathbb{P}^1$ .
3. Quelle est l'image de  $[0 : 1 : 0] \in C$  par  $g$  ?

On note  $\sim$  la relation d'équivalence linéaire entre diviseurs :  $D \sim D'$  si  $D - D' = \text{Div}(f)$  pour une fonction rationnelle  $f$ . Le **groupe de Picard** de  $S$  est le groupe quotient  $\text{Pic}(S) = \text{Div}(S)/\sim$ .

## 2.2 Bouger les diviseurs

Commençons par montrer qu'on peut déplacer par équivalence linéaire le support d'un diviseur pour éviter un nombre arbitraire (fini) de points.

**Théorème 1** (voir [Sha94, p. 158]). *Pour tout diviseur  $D$  sur une variété lisse  $X \subset \mathbb{P}^n$ , et pour tous points  $x_1, \dots, x_m \in X$ , il existe un diviseur  $D'$  tel que  $D' \sim D$  et  $x_i \notin \text{Supp}(D')$  pour  $i = 1, \dots, m$ .*

*Preuve.* Tout d'abord il est possible de choisir un hyperplan  $H \subset \mathbb{P}^n$  qui ne contienne aucun des  $x_i$  : l'espace des hyperplans de  $\mathbb{P}^n$  est encore un  $\mathbb{P}^n$ , et la condition "passer par un point" est un  $\mathbb{P}^{n-1}$ .

On peut également supposer que  $D$  est une hypersurface irréductible : le cas général suit par récurrence sur le nombre de composantes irréductible du support de  $D$ .

On va procéder par récurrence sur  $m$  : supposons  $x_1, \dots, x_{m-1} \notin D$ , et  $x_m \in D$ .

Soit  $U = \mathbb{A}^n \cap X = X \setminus H$  l'ouvert affine complémentaire de  $H$ , et soit  $g$  une équation locale de  $D$  en  $x_m$ . On peut écrire  $g = f_1/f_2$  avec  $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[U]$  et  $f_2(x_m) \neq 0$ , ainsi quitte à remplacer  $g$  par  $f_1$  on peut supposer  $g$  régulière sur  $U$ . Le diviseur principal  $\text{Div}(g)$  s'écrit  $\text{Div}(g) = (g)_0 - (g)_\infty$ , avec  $\text{Supp}(g)_\infty \subset H$ , et  $(g)_0 = D + R$  où  $R$  est effectif. Ainsi  $D \sim D - \text{Div}(g) = (g)_\infty - R$ .

On veut s'assurer que  $R$  ne contienne aucun  $x_i$  (pour  $i = 1, \dots, m$ ). Pour cela, on modifie l'équation locale  $g$  comme suit. Pour  $i = 1, \dots, m-1$ , on peut choisir des fonctions  $g_i \in \mathbb{C}[U]$  tel que  $g_i(x_i) \neq 0$ , et  $g_i = 0$  sur  $D \cup \{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m\}$ . Alors en remplaçant  $g$  par

$$g + \sum_{i=1}^{m-1} a_i g_i^2$$

avec  $a_i \neq -g(x_i)/g_i(x_i)^2$ , on se ramène au cas où  $R$  ne contient aucun  $x_i$ .

Il faut finalement vérifier que  $g + \sum a_i g_i^2$  est encore une équation locale de  $D$ . Chaque  $g_i$  est un multiple de  $g$  dans l'anneau local  $\mathcal{O}_{x_m}$ , on a  $g_i = g u_i$  avec  $u_i$  régulier en  $x_m$ . Il suffit alors d'écrire

$$g + \sum a_i g_i^2 = g + \sum a_i g^2 u_i^2 = g(1 + \sum a_i g u_i^2)$$

et de remarquer que  $1 + \sum a_i g u_i^2$  vaut 1 en  $x_m$ .  $\square$

Soit  $S$  une surface projective lisse, et  $D_1, D_2$  deux diviseurs. On dit que  $D_1$  et  $D_2$  sont en **position générale** s'ils n'ont pas de composante commune.

**Corollaire 2.** *Soit  $D_1, D_2$  deux diviseurs sur une surface projective lisse  $S$ . Alors il existe un diviseur  $D'_2$  linéairement équivalent à  $D_2$ , tel que  $D_1$  et  $D'_2$  soient en position générale.*

*Preuve.* Choisissons des points  $p_i$ , tel que chaque composante de  $D_1$  contient au moins l'un des  $p_i$ . Alors par le théorème 1 on peut trouver  $D'_2 \simeq D_2$  tel que le support de  $D'_2$  ne contienne aucun  $p_i$ , d'où le résultat.  $\square$

### 2.3 Intersection locale

*Définition 3.* Soit  $D_1, D_2$  deux diviseurs effectifs sur une surface  $S$ , en position générale. Notons  $f_1, f_2$  des équations locales respectives de  $D_1, D_2$  au voisinage d'un point  $x \in S$ . On appelle le nombre

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_x / (f_1, f_2)$$

le **nombre d'intersection local** de  $D_1$  et  $D_2$  au point  $x$ , on le note  $(D_1 \cdot D_2)_x$ .

Afin de nous convaincre que cette définition correspond à la définition intuitive d'intersection, commençons par la notion de paramètres locaux en un point :

*Définition 4* (voir [Sha94, p. 98]). Soit  $x \in X$  un point lisse dans  $X$  de dimension  $n$ , et  $u_1, \dots, u_n \in \mathfrak{m}_x$ ; on dit que  $u_1, \dots, u_n$  sont des **paramètres locaux** au point  $x$  si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

1. Les  $u_i$  forment une base du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ ;
2. Les variétés  $\mathbb{V}(u_i)$  sont lisses et transverses en  $x$ ;
3. Les différentielles  $d_x u_i$  sont linéairement indépendantes.

Pour montrer l'équivalence entre ces définitions il faut considérer l'application linéaire

$$d_x : u \in \mathfrak{m}_x \rightarrow d_x u \in T_x X^*.$$

On voit facilement que  $\mathfrak{m}_x^2 \subset \ker(d_x)$ , et en fait il y a égalité et  $d_x$  induit un isomorphisme  $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \cong T_x X^*$ .

On peut par ailleurs montrer que des paramètres locaux engendrent l'idéal  $\mathfrak{m}_x$  : il faut utiliser l'avatar suivant du lemme de Nakayama (avec  $A = \mathcal{O}_x$ ,  $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}_x^2$ ,  $M = \mathfrak{m}_x$ ).

**Lemme 5** ([Sha94, p. 283]). Soient  $A$  un anneau,  $\mathfrak{a} \subset A$  un idéal tel que tout élément de  $1 + \mathfrak{a}$  est inversible, et  $M$  un  $A$ -module de type fini. Des éléments  $u_1, \dots, u_n$  engendrent  $M$  ssi leurs images engendrent  $M/\mathfrak{a}M$ .

Rappelons également l'énoncé du

**Nullstellensatz 6** ([Sha94, Corollary p. 282]). Soient  $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ , et soit  $g$  s'annulant sur l'ensemble algébrique défini par les  $f_i$ . Alors  $g^k \in (f_1, \dots, f_r)$  pour un certain  $k \geq 1$ .

**Proposition 7.** Soient  $D_1, D_2$  deux courbes irréductibles distinctes sur une surface  $S$ , et  $f_1, f_2$  leurs équations locales en un point  $x \in S$ .

1.  $(D_1 \cdot D_2)_x = 0$  ssi l'un des  $D_i$  ne passe pas par  $x$ ;
2.  $(D_1 \cdot D_2)_x = \dim \mathcal{O}_x/(f_1, f_2)$  est finie ;
3.  $(D_1 \cdot D_2)_x = 1$  ssi  $f_1, f_2$  sont des paramètres locaux en  $x$ .

*Preuve.* 1. Supposons par exemple que  $f_1(x) \neq 0$ . Alors pour toute fonction régulière  $g \in \mathcal{O}_x$  on peut écrire  $g = \frac{g}{f_1} f_1$  et donc  $g \in (f_1)$ . Ainsi le quotient  $\mathcal{O}_x/(f_1, f_2)$  est trivial.

Réciproquement si le quotient est trivial on peut écrire  $1 = f_1 P_1 + f_2 P_2$ , et donc l'une au moins des  $f_i$  est non nulle en  $x$ .

2. Supposons que  $f_1(x) = f_2(x) = 0$  (sinon c'est fini par le point précédent), donc localement  $x$  est l'unique point d'intersection de  $D_1$  et  $D_2$ . Par le Nullstellensatz 6 pour chaque paramètre local  $u$  il existe  $k \geq 1$  tel que  $u^k \in (f_1, f_2)$ . En conséquence il existe un  $k \geq 1$  tel que  $\mathfrak{m}_x^k \subset (f_1, f_2)$ . Or  $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^k$  est de dimension finie (polynômes à  $n$  variables de degré au plus  $k-1$ ), d'où le résultat.

3. Si  $f_1, f_2$  sont des paramètres locaux, alors  $\dim \mathcal{O}_x/(f_1, f_2) = \dim \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x = 1$ .

Réciproquement si  $f_1, f_2$  ne sont pas des paramètres locaux, il existe  $\bar{f} \in \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$  qui n'est pas une combinaison linéaire de  $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ . Montrons que dans ce cas les fonctions 1,  $\bar{f}$  sont linéairement indépendantes dans  $\mathcal{O}_x/(f_1, f_2)$ , qui sera donc de dimension au moins 2. Il s'agit de voir que  $\bar{f}$  n'est pas nul dans ce quotient, c'est à dire pas de la forme  $f = P_1 f_1 + P_2 f_2$ . Mais alors en écrivant  $P_i = a_i + Q_i$  avec  $a_i \in \mathbb{C}$ ,  $Q_i \in \mathfrak{m}_x$ , on aurait  $f = (a_1 + Q_1) f_1 + (a_2 + Q_2) f_2 = a_1 f_1 + a_2 f_2 \pmod{\mathfrak{m}_x^2}$ , contradiction. □

L'intersection locale possède la propriété d'additivité suivante :

**Proposition 8** ([Sha94, p. 227]). *Soient  $D_1, D_2, D'_2$  trois diviseurs effectifs sur une surface  $S$ , avec  $D_1, D_2$  et  $D_1, D'_2$  respectivement en position générale. Soit  $x$  un point de  $S$ . Alors*

$$(D_1 \cdot (D_2 + D'_2))_x = (D_1 \cdot D_2)_x + (D_1 \cdot D'_2)_x.$$

*Preuve.* Soit  $f, g$  des équations locales de  $D_2$  et  $D'_2$ . On veut montrer

$$\dim \mathcal{O}_{x, D_1} / (fg) = \dim \mathcal{O}_{x, D_1} / (f) + \dim \mathcal{O}_{x, D_1} / (g).$$

D'une part la suite exacte

$$0 \rightarrow (g)/(fg) \rightarrow \mathcal{O}_{x, D_1} / (fg) \rightarrow \mathcal{O}_{x, D_1} / (f) \rightarrow 0$$

donne  $\dim \mathcal{O}_{x, D_1} / (fg) = \dim \mathcal{O}_{x, D_1} / (f) + \dim (g)/(fg)$ .

D'autre part la multiplication par  $g$  donne un isomorphisme  $\mathcal{O}_{x, D_1} / (f) \cong (g)/(fg)$  : il faut vérifier que  $g$  n'est pas un diviseur de 0 dans  $\mathcal{O}_{x, D_1}$ , mais c'est clair du point de vue analytique (théorème des zéros isolés). Finalement  $\dim \mathcal{O}_{x, D_1} / (f) = \dim (g)/(fg)$  ; l'égalité souhaitée en découle.  $\square$

Remarquons que deux courbes irréductibles distinctes sur une surface se coupent en un nombre fini de points : c'est vrai pour des courbes sur  $\mathbb{P}^2$  (utiliser le résultant sur une carte affine), et on se ramène à ce cas par projection. La définition suivante fait donc sens.

**Définition 9** (Partielle). Soient  $D_1, D_2$  deux diviseurs en position générale sur une surface  $S$ . Alors le nombre

$$D_1 \cdot D_2 = \sum_{x \in \text{Supp } D_1 \cap \text{Supp } D_2} (D_1 \cdot D_2)_x$$

est appelé le **nombre d'intersection** de  $D_1$  et  $D_2$ .

Le problème est maintenant de se passer de l'hypothèse de "position générale". En particulier on voudrait pouvoir parler de l'auto-intersection  $D^2 = D \cdot D$  d'un diviseur  $D$ .

**Théorème 10.** *Soient  $D_1, D_2, D'_2$  trois diviseurs d'une surface  $S$ . On suppose que  $D_2 \sim D'_2$ , et que  $D_2, D'_2$  sont chacun en position générale avec  $D_1$ . Alors*

$$D_1 \cdot D_2 = D_1 \cdot D'_2.$$

*Preuve.* Par hypothèse il existe une fonction rationnelle  $f$  tel que  $D_2 - D'_2 = \text{Div}(f)$ . On veut montrer  $D_1 \cdot \text{Div}(f) = 0$ , et il suffit de le montrer en remplaçant  $D_1$  par une courbe irréductible  $C \subset \text{Supp } D_1$ . Il s'agit donc de montrer que si  $f$  est une fonction rationnelle, et  $C$  une courbe irréductible, avec  $\text{Supp } \text{Div}(f)$  ne contenant ni  $C$  ni un point singulier de  $C$ , alors  $C \cdot \text{Div}(f) = 0$ .

Si  $x \in C \cap (f)_0$ , et  $f_\alpha$  est une équation locale de  $C$  en  $x$ , on a

$$(C \cdot \text{Div}(f))_x = \dim \mathcal{O}_{S, x} / (f_\alpha, f) = \dim \mathcal{O}_{C, x} / (f).$$

De façon similaire si  $x \in C \cap (f)_\infty$ , on a

$$(C \cdot \text{Div}(f))_x = -\dim \mathcal{O}_{S, x} / (f_\alpha, 1/f) = -\dim \mathcal{O}_{C, x} / (1/f).$$

Si la courbe  $C$  est lisse en chaque point  $x \in C \cap (f)$ , alors par définition  $\dim \mathcal{O}_{C, x} / (f)$  (resp.  $-\dim \mathcal{O}_{C, x} / (1/f)$ ) est la multiplicité  $v_x(f) \in \mathbb{Z}$  du diviseur  $\text{Div}(f)$  en  $x$ . On est ramené à montrer que le diviseur  $\text{Div}(f) = \sum v_x(f)x$  sur  $C$  est de degré 0 ; c'est le contenu du théorème 12 ci-dessous.

Si  $C$  n'est pas lisse, il faut considérer la normalisation  $\tilde{C} \rightarrow C$ , et appliquer le raisonnement précédent à  $\tilde{C}$  : je ne donne pas les détails (voir [Sha94, p. 231]).  $\square$

Ce théorème permet d'obtenir la définition :

**Définition 11** (Définition générale de l'intersection). Soient  $D_1, D_2$  deux diviseurs sur une surface projective lisse. On appelle **nombre d'intersection** de  $D_1$  et  $D_2$  le nombre

$$D_1 \cdot D_2 = \sum_{x \in \text{Supp } D_1 \cap \text{Supp } D_2} (D_1 \cdot D_2)_x$$

où  $D'_2$  est n'importe quel diviseur tel que  $D'_2 \sim D_2$  et  $D'_2$  est en position générale avec  $D_1$ .

Il découle du théorème 10 que  $D_1 \cdot D_2$  est ainsi bien défini et ne dépend que des classes linéaire de  $D_1$  et  $D_2$ , de plus le produit d'intersection est bilinéaire symétrique par la proposition 8.

Un diviseur sur une courbe lisse est simplement une somme formelle finie de points  $p_i$  pondérés par des multiplicités :  $D = \sum_i k_i p_i$ . Le **degré** de  $D$  est défini comme la somme  $\text{deg}(D) = \sum_i k_i$ .

**Théorème 12.** Soit  $f: C \rightarrow \mathbb{P}^1$  un morphisme non constant d'une courbe projective lisse vers  $\mathbb{P}^1$ . Alors le diviseur  $\text{Div}(f) = (f)_0 - (f)_\infty$  a degré 0.

*Preuve.* Je donne une preuve sur  $\mathbb{C}$  utilisant un peu d'analyse complexe (théorème des résidus + Stokes). Dans [Sha94, p.168] on trouvera une preuve sur un corps algébriquement clos arbitraire, mais qui est sensiblement moins élémentaire.

Tout d'abord rappelons que si  $g$  est une fonction méromorphe au voisinage de  $0 \in \mathbb{C}$ , on peut écrire  $g(z) = z^n h(z)$  pour un certain  $n \in \mathbb{Z}$  et  $h$  holomorphe en 0 vérifiant  $h(0) \neq 0$ . Donc

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{n}{z} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$

et le résidu de  $g$  en 0 est donc  $n$  (ordre du zéro ou du pôle).

Maintenant regardons  $C$  (que l'on suppose lisse dans un premier temps) comme une surface de Riemann, et pour chaque zéro ou pôle  $p_i$  de  $f$  choisissons  $B_i$  un petit voisinage (analytique) de  $p_i$  difféomorphe à un disque, avec les  $B_i$  deux à deux disjoints. Notons  $S$  le complément des  $B_i$  dans  $C$ , et  $\omega = df/f$ , qui est une 1-forme holomorphe sur  $S$  (i.e. localement de la forme  $h(z)dz$ , avec  $\bar{\partial}h = 0$ ). En particulier  $d\omega = 0$  sur  $S$ .

D'une part, par le théorème de Stokes

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega = 0$$

D'autre part, par le théorème des résidus, et la remarque ci-dessus,

$$\int_{\partial S} \omega = \sum \int_{\partial B_i} \omega = \text{deg}(f)$$

d'où le résultat. □

Remarquons que la théorie développée dans ce paragraphe permet d'obtenir le théorème de Bézout :

**Théorème 13.** Soit  $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^2$  deux courbes planes sans composante irréductible commune, de degré respectif  $d_1$  et  $d_2$ . Alors

$$C_1 \cdot C_2 = \sum_{x \in C_1 \cap C_2} (C_1 \cdot C_2)_x = d_1 d_2.$$



*Preuve.* Si  $D \subset \mathbb{P}^2$  est une droite, on a  $C_i \sim d_i D$  et  $D^2 = 1$ , d'où le résultat.  $\square$

*Exercice 9.* Dédurre du théorème de Bézout que le groupe des automorphismes de  $\mathbb{P}^2$  est isomorphe à  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$ . Quels sont les automorphismes de  $\mathbb{P}^2$  qui envoient la droite à l'infini sur l'axe des  $y$  (c'est-à-dire  $z = 0$  sur  $x = 0$ ), et le point  $[1 : 0 : 0]$  sur  $[0 : 0 : 1]$ ? Quelle est l'image de la droite  $y = \alpha$  par un tel automorphisme? Quelle est l'image de la parabole d'équation  $x = y^2$ ?

### 3 Applications birationnelles entre surfaces

Le but de ce chapitre est de montrer que toute application birationnelle entre deux surfaces peut être vue comme une suite d'éclatements (ou d'inverses d'éclatements).

Rappelons la définition : une **application birationnelle**  $f: X \dashrightarrow Y$  est une application rationnelle possédant un inverse  $g$  lui aussi rationnel (on a  $g(f(x)) = x$  pour tout  $x$  tel que  $f$  soit défini en  $x$  et  $g$  soit défini en  $f(x)$ ). Autrement dit une telle application birationnelle équivaut à la donnée d'un isomorphisme entre un ouvert (de Zariski) de  $X$  et un ouvert de  $Y$ . On dit parfois transformation birationnelle, pour insister sur le fait qu'il ne s'agit pas à strictement parler d'une application. Pour la même raison, on utilise la notation standard "flèche brisée"  $\dashrightarrow$ , et on réserve  $\rightarrow$  aux morphismes.

#### 3.1 Notion d'éclatement

Considérons le changement des coordonnées polaires en les coordonnées cartésiennes du plan (réel),  $(r, \theta) \rightarrow (x, y)$ . Les droites  $\theta = cte$  sont envoyées sur des droites du plan  $(x, y)$  passant par l'origine, et la droite  $r = 0$  est contractée sur le point  $(0, 0)$ .

L'application d'éclatement est une application algébrique avec des propriétés analogues. Heuristiquement :  $\theta = \tan y/x$ , ainsi  $y/x$  est un analogue algébrique de l'argument. L'argument étant fixé, il reste à fixer  $r$ , ce qui revient à fixer  $x$ . Ainsi, si l'on pose  $\theta = y/x$ ,  $r = x$ , on a  $y = \theta r$  et l'analogue du changement de coordonnées ci-dessus est  $(r, \theta) \rightarrow (x, y) = (r, \theta r)$ . Cette application est (la carte d') un éclatement.

D'un point de vue légèrement différent, considérons le graphe  $\Gamma$  de la fonction rationnelle  $(x, y) \in \mathbb{C}^2 \rightarrow [x : y] \in \mathbb{P}^1$ . On a

$$\Gamma = \{(x, y), [u : v] \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1; xv = yu\}.$$

La projection naturelle  $\pi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^2$  est l'application d'éclatement. On a  $\pi^{-1}(0, 0)$  isomorphe à  $\mathbb{P}^1$ , et la préimage de tout autre point est un point. De plus, dans la carte  $U = \{u = 1\}$ , on a

$$U \cap \Gamma = \{(x, y), [1 : v]; xv = y\}$$

isomorphe à  $\mathbb{C}^2$  (avec coordonnées  $x$  et  $v$ ), et  $\pi : (x, y, [1 : v]) \rightarrow (x, xv)$  est bien l'application vue ci-dessus.

Notons que cette construction est locale : on peut remplacer  $\mathbb{C}^2$  par un voisinage  $W$  d'un point  $p \in S$  où  $S$  est une surface (lisse), et  $x, y$  sont alors des paramètres locaux.

*Exercice 10.* (a) De façon similaire écrire l'application d'éclatement dans la carte  $\{v = 1\}$ . En déduire qu'un éclatement s'obtient en remplaçant une carte locale  $(x, y)$  par deux nouvelles cartes  $(x, y/x)$  et  $(x/y, y)$ .

(b) Montrer que l'involution  $(x, y) \mapsto (1/x, 1/y)$ , vu comme une application de  $\mathbb{P}^2$  dans  $\mathbb{P}^2$ , est égal à la composée de six éclatements.

En résumé : étant donné  $p \in S$  un point sur une surface lisse, il existe une application régulière  $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$  telle que

- $E = \pi^{-1}(p)$  est une courbe rationnelle (i.e. isomorphe à  $\mathbb{P}^1$ );
- $\pi$  induit un isomorphisme de  $\tilde{S} \setminus E$  vers  $S \setminus \{p\}$ .

Remarquons que les surfaces  $S$  et  $\tilde{S}$  sont birationnelles, l'application rationnelle  $\pi^{-1} : S \dashrightarrow \tilde{S}$  n'est pas défini en  $p$ .

*Exercice 11.* En éclatant un point dans  $\mathbb{R}^2$  on obtient un ruban de Moebius (voir couverture de [Sha94]).

Si  $D$  est un diviseur de Cartier sur  $Y$  donnée par des équations locale  $g_\alpha$ , et si  $f : X \rightarrow Y$  est régulière, on définit le tiré en arrière ("pull-back") de  $D$  par  $f$  comme le diviseur  $f^*(D)$  sur  $X$  défini par les équations locales  $g_\alpha \circ f$ . Cette notion a de bonnes propriétés par rapport à l'intersection des diviseurs :

**Proposition 14** (voir [Sha94, p. 252]). *Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application régulière birationnelle entre deux surfaces, alors :*

1. Si  $D_1, D_2$  sont deux diviseurs sur  $Y$ , on a  $f^*D_1 \cdot f^*D_2 = D_1 \cdot D_2$ .
2. Si  $D$  est un diviseur sur  $Y$ , et  $E$  est un diviseur sur  $X$  dont toutes les composantes sont contractées par  $f$ , alors  $E \cdot f^*D = 0$ .

*Preuve.* Remarquer que  $D_1 \sim D_2$  implique  $f^*D_1 \sim f^*D_2$  : si  $D_1 - D_2 = \text{Div}(g)$ , alors  $f^*D_1 - f^*D_2 = \text{Div}(g \circ f)$ . Maintenant, bouger les diviseurs !  $\square$

Nous pouvons maintenant faire un peu de numérogie autour de l'application d'éclatement.

**Proposition 15.** *Soit  $\pi : S' \rightarrow S$  l'éclatement d'un point  $p$  sur une surface lisse  $S$ ; notons  $E$  le diviseur exceptionnel. Soit  $C \subset S$  une courbe de multiplicité  $m$  au point  $p$ , alors  $\pi^*C = C' + mE$ , où  $C' = \pi^{-1}(C \setminus \{x\})$ .*

*Preuve.* Soit  $x, y$  des paramètres locaux en  $p$ ,  $C$  admet localement une équation de la forme  $P(x, y) + \text{monômes de degré } > m = 0$ , avec  $P$  homogène de degré  $m$ . On se place dans la carte de l'éclatement  $(x', y') = (x, y/x)$ , l'équation de  $\pi^*C$  est  $P(x', x'y') + \dots = 0$ , qui s'écrit encore  $x'^m(P(1, y') + \dots) = 0$ . Comme  $E$  est d'équation  $x' = 0$ , on a le résultat.  $\square$

La courbe  $C'$  s'appelle la *transformée stricte* de  $C$ .

**Corollaire 16** (voir [Sha94, p. 253]). *Soit  $\pi : S' \rightarrow S$  l'éclatement d'un point  $p$  sur une surface lisse  $S$ ; notons  $E$  le diviseur exceptionnel. Alors :*

1.  $E^2 = E \cdot E = -1$ ;
2. Si  $C$  est une courbe sur  $S$  de multiplicité  $m$  en  $p$ , et si  $C'$  est la transformée stricte de  $C$ , alors  $C' \cdot E = m$ ;

3. Si  $C_1, C_2$  sont deux courbes de multiplicité  $m_1, m_2$  en  $p$ , alors  $C'_1 \cdot C'_2 = C_1 \cdot C_2 - m_1 m_2$  ;
4. En particulier, si  $C$  est une courbe lisse au point  $p$ , alors  $C'^2 = C^2 - 1$  ;
5. En particulier encore, si  $C_1, C_2$  sont sans composante commune et de multiplicité  $m_1, m_2$  en  $p$ , alors  $C_1 \cdot C_2 \geq m_1 m_2$ .

*Preuve.* 1. Considérons  $C$  d'équation  $y = 0$ . Dans la carte  $(x', y')$  les courbes  $C'$  et  $E$  sont d'équation respective  $y' = 0$  et  $x' = 0$ , on a donc  $E \cdot C' = 1$ . On a

$$0 = \pi^* C \cdot E = C' \cdot E + E^2 = 1 + E^2,$$

d'où  $E^2 = -1$ .

2. On a  $0 = \pi^* C \cdot E = (C' + mE) \cdot E = C' \cdot E - m$ .
3. On a  $C_1 \cdot C_2 = \pi^* C_1 \cdot \pi^* C_2 = (C'_1 + m_1 E) \cdot (C'_2 + m_2 E) = C'_1 \cdot C'_2 + m_1 \cdot m_2 + m_1 \cdot m_2 - m_1 \cdot m_2$ . □

Discussion de la signification de  $E^2 = -1$ , lien avec la théorie de l'intersection  $\mathbb{C}^\infty$  où l'on définit les intersections locales avec un signe.

### 3.2 Transformations birationnelles entre surfaces

Nous attaquons maintenant l'étude de la structure des applications birationnelles entre surfaces projectives lisses. Le premier théorème concerne en fait une application rationnelle quelconque entre surfaces (et admet des généralisations en dimension supérieure, mais la preuve est alors plus dure) :

**Théorème 17** (voir [Sha94, p. 254]). *Soient  $S$  une surface projective lisse, et  $f : S \dashrightarrow Y \subset \mathbb{P}^n$  une application rationnelle. Alors il existe une suite d'éclatements  $\pi : Z \rightarrow S$  qui résoud les points d'indétermination de  $f$ , autrement dit dans le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ \pi \swarrow & & \searrow \bar{f} \\ S & \dashrightarrow & Y \\ & f & \end{array}$$

$\bar{f}$  est une application régulière.

*Preuve.* Au voisinage d'un point  $p \in S$  l'application  $f$  s'écrit  $q \in S \dashrightarrow [f_0(q) : \dots : f_n(q)] \in S' \subset \mathbb{P}^n$ , avec les  $f_i \in \mathcal{O}_p$  sans facteur commun. L'application  $f$  est non régulière au point  $p$  si  $f_i(p) = 0$  pour tout  $i$ . Remarquons que l'ensemble des points d'indétermination de  $f$  ne peut pas contenir une courbe passant par  $p$  (car alors les  $f_i$  admettraient l'équation locale de cette courbe comme facteur commun),  $f$  est donc régulière en dehors d'un nombre fini de points.

Considérons maintenant  $H$  la transformée par  $f$  d'une section hyperplane de  $Y$ , explicitement :

$$H = \{q \in S; \sum a_i f_i(q) = 0\}.$$

Il s'agit d'une courbe telle que  $H^2 \geq 0$  (changer les coefficients  $a_i$  donne une courbe linéairement équivalente en position générale avec  $H$ ) et si  $p$  est un point d'indétermination alors  $p \in H$ . Eclatons un tel point  $p$ , la transformée stricte  $H'$  vérifie  $0 \leq H' \cdot H' < H \cdot H$ . Après un nombre fini de tels éclatements, il ne restera aucun point d'indétermination, ce qu'on voulait. □

*Remarque 18.* L'argument ci-dessus permet de montrer que si  $f : X \dashrightarrow Y$  est une application rationnelle avec  $X$  lisse de dimension quelconque, alors  $f$  est régulière en dehors d'un ensemble de codimension au moins 2. En particulier si  $X$  est une courbe lisse,  $f$  est régulière ; ceci implique que deux courbes lisses sont birationnelles ssi elles sont isomorphes. Ainsi la dimension 2 est la plus basse dimension où les notions d'équivalence birationnelle et d'isomorphisme (entre variétés lisses) ne coïncident pas.

Le deuxième théorème concerne les applications birationnelles et est spécifique à la dimension 2 :

**Théorème 19** (voir [Sha94, p. 256]). *Soient  $S, S'$  deux surfaces projectives lisses, et  $f : S \rightarrow S'$  une application birationnelle régulière. Alors  $f$  est la composée d'un nombre fini d'applications d'éclatement.*

Pour la preuve nous aurons besoin du

**Lemme 20.** *Soit  $f : X \dashrightarrow Y$  une application birationnelle entre deux surfaces. Si  $f^{-1}$  est non régulière en un point  $y \in Y$ , alors il existe une courbe  $C \subset X$  telle que  $f(C) = \{y\}$ .*

*Preuve du lemme.* Par le théorème 17, il existe une suite d'éclatements  $\pi : Z \rightarrow Y$  qui résout  $f^{-1}$ , autrement dit tel que dans le diagramme suivant  $\sigma : Z \rightarrow X$  soit un morphisme :

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ \sigma \swarrow & & \searrow \pi \\ X & \overset{\text{---}}{\dashrightarrow} & Y \\ & f & \end{array}$$

Soit  $H_X$  une section hyperplane de  $X$ , et  $H_Y, H_Z$  sa transformée stricte sur  $Y$  et  $Z$  respectivement. Comme  $y$  est un point base de  $f^{-1}$ , on a  $y \in H_Y$ . Donc  $\pi^{-1}(y) \cap H_Z \neq \emptyset$ , et  $\sigma(\pi^{-1}(y)) \cap H_X \neq \emptyset$ . Ceci implique que  $\dim \sigma(\pi^{-1}(y)) > 0$ , et toute courbe  $C$  dans  $\sigma(\pi^{-1}(y))$  convient.  $\square$

En fait on peut remarquer que  $\sigma(\pi^{-1}(y))$  est connexe par construction, donc on peut prendre  $C$  égal à  $\sigma(\pi^{-1}(y))$  (c'est une courbe connexe, possiblement réductible).

*Preuve du théorème.* Si  $f^{-1}$  n'est pas régulière en un point  $y \in S'$ , considérons  $\pi : V \rightarrow S'$  l'éclatement du point  $y$ . Montrons que  $h = \pi^{-1} \circ f$  est encore régulière. Sinon, il existe  $x \in S$  un point où  $h$  n'est pas défini. Dans cette situation d'une part  $f(x) = y$  et  $f$  n'est pas localement inversible en  $x$  ; d'autre part il existe une courbe dans  $V$  qui est contractée sur  $x$  par  $h^{-1}$ . Cette courbe ne peut être que le diviseur exceptionnel  $E$  associé à  $\pi$ . Considérons  $p$  et  $q$  deux points distincts de  $E$  où  $h^{-1}$  est régulière, et  $C, C'$  deux germes de courbes lisses transverses à  $E$  en  $p$  et  $q$  respectivement. Alors  $\pi(C)$  et  $\pi(C')$  sont deux germes de courbes lisses transverses en  $y$ , qui sont image par  $f$  de deux germes de courbes en  $x$ . La différentielle de  $f$  en  $x$  est donc de rang 2, ce qui vient contredire le fait que  $f$  n'est pas localement inversible en  $x$ .  $\square$

En regroupant les deux précédents théorèmes on obtient le résultat principal de ce paragraphe :

**Théorème 21** (Zariski). *Soient  $S, S'$  deux surfaces projectives lisses, et  $f : S \rightarrow S'$  une application birationnelle. Alors il existe une troisième surface  $V$  et deux suites d'éclatements  $\pi : V \rightarrow S$*

et  $\pi' : V \rightarrow S'$  tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ \pi \swarrow & & \searrow \pi' \\ S & \overset{f}{\dashrightarrow} & S' \end{array}$$

*Exercice 12.* Expliciter la décomposition en éclatements/inverse d'éclatements pour :

- (a) L'application birationnelle  $f: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  qui est donnée par l'identité en restriction à  $\mathbb{A}^2$  ;
- (b) L'application birationnelle  $g: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  qui est donnée par l'automorphisme  $(x, y) \in \mathbb{A}^2 \rightarrow (x + y^2, y) \in \mathbb{A}^2$ .

### 3.3 Désingularisation des courbes

Voici une jolie application des techniques ci-dessus :

**Théorème 22** (voir [Sha94, p. 261]). *Soit  $C \subset S$  une courbe irréductible dans une surface lisse. Alors il existe une suite d'éclatements  $\pi : V \rightarrow S$  tel que la transformée stricte de la courbe  $C$  sur  $V$  soit lisse.*

*Preuve.* Notons  $\mu_x(C) \geq 2$  la multiplicité d'un point singulier  $x$  de  $C$ , et considérons  $\pi : S' \rightarrow S$  l'éclatement du point  $x$ . On note  $E$  le diviseur exceptionnel, et  $C'$  la transformée stricte de  $C$ . D'une part  $\mu_x(C) = C' \cdot E$ , d'autre part  $C' \cdot E = \sum_{x' \in E} (C' \cdot E)_{x'}$ . Or  $(C' \cdot E)_{x'} \geq \mu_{x'}(C')$ , donc on obtient l'inégalité

$$\mu_x(C) \geq \sum_{x' \in E} \mu_{x'}(C').$$

Si il y a plusieurs points  $x'$  sur  $E \cap C'$ , alors la multiplicité de chacun d'eux est strictement inférieure à  $\mu_x(C)$  et l'on peut poursuivre par récurrence. Le cas délicat est quand il n'y qu'un seul point  $x'$  avec  $\mu_{x'}(C') = \mu_x(C)$ , on va montrer qu'après un nombre fini d'éclatement la multiplicité finit par chûter.

On peut choisir des paramètres locaux  $z, w$  au point  $x$  de façon que l'équation locale de  $C$  soit de la forme  $z^m = P(z, w)$ , où  $P$  est un polynôme dont tous les monômes sont de degré  $> m$  (ici  $m = \mu_x(C)$ ). On voit que  $P$  admet au moins un monôme de degré  $< m$  en  $z$ , sinon on aurait  $C = \{z^m(1 + Q(z, w)) = 0\}$  avec  $Q(0, 0) = 0$ , et l'équation locale de  $C$  serait simplement  $z = 0$  : absurde. Eclatons le point  $x$  et plaçons nous dans la carte  $z' = z/w, w' = w$ , autrement dit  $z = z'w', w = w'$ . L'équation de  $C'$  s'obtient en remplaçant dans l'équation de  $C$  et en divisant par  $w'^k$  ; si  $P = \sum a_{ij}w^i z^j$  on obtient l'équation

$$z'^m = \sum a_{ij}w'^{i+j-m}z'^j.$$

Si  $j < m$ , on voit que le degré  $i + j - m$  décroît, ainsi en répétant ce processus on finit bien par faire baisser la multiplicité.  $\square$

*Exercice 13.* Dans  $\mathbb{C}^2$  on considère les courbes affines  $C_1 = \{y^2 = x^5\}$  et  $C_2 = \{y^2 = x^3\}$ .

1. Montrer que l'on peut désingulariser  $C_1$  en deux éclatements, c'est-à-dire qu'il existe  $\pi : V \rightarrow \mathbb{C}^2$  composée de deux éclatements tel que la transformée stricte  $C'_1$  de  $C_1$  sur  $V$  soit une courbe lisse.

2. Montrer que  $C'_1$  intersecte le lieu exceptionnel de  $\pi$  (i.e., les deux courbes contractées par  $\pi$ ) en un seul point  $p$ , et expliciter une équation de  $C'_1$  dans une carte centrée en  $p$ .
3. Montrer que la transformée stricte  $C'_2$  de  $C_2$  sur  $V$  est également lisse, et déterminer l'ensemble  $C'_1 \cap C'_2$ .
4. Calculer le nombre d'intersection local  $(C_1 \cdot C_2)_{(0,0)}$ .
5. *Question subsidiaire* : comment caractériser les courbes singulières  $C \subset \mathbb{C}^2$ , tel que  $C$  devienne lisse après un seul éclatement ?

### 3.4 Genre arithmétique

D'abord un lemme qui permet de calculer le diviseur canonique d'une surface obtenue par éclatement.

**Lemme 23.** *Soit  $\pi: S' \rightarrow S$  l'éclatement d'un point  $p$  d'une surface lisse, et soit  $E$  le diviseur exceptionnel. Alors*

$$K_{S'} = \pi^* K_S + E.$$

*Preuve.* Localement  $\pi$  s'écrit  $(x', y') \mapsto (x, y) = (x', x'y')$ . Considérons la forme  $dx \wedge dy$  sur  $S$ , et calculons la 2-forme "pull-back"  $\omega$  sur  $S'$  :

$$\omega = dx' \wedge d(x'y') = x'dx' \wedge dy'.$$

Or  $x' = 0$  est l'équation locale de  $E$ , d'où le résultat. □

*Exercice 14.* Dans les conditions du lemme, montrer que

$$\text{Pic}(S') \simeq \text{Pic}(S) \oplus \mathbb{Z}E.$$

Si  $C$  est une courbe lisse dans une surface  $S$  lisse, la formule d'adjonction (combinée avec Riemann-Roch) permet de calculer le genre de  $C$  :

$$2g(C) - 2 = K \cdot C + C^2.$$

Le terme de droite continue à faire sens quand  $C$  est une courbe singulière (éventuellement réductible), et permet de définir le *genre arithmétique*  $p_a(C)$  de la courbe  $C$ . Si  $C$  est une courbe irréductible singulière, on peut aussi définir le *genre géométrique*  $g(C)$  de  $C$  comme le genre de sa désingularisation. Ces deux notions ne coïncident pas, et leur relation découle du lemme suivant.

**Lemme 24.** *Soit  $C \subset S$  une courbe dans une surface lisse, et  $\pi: S' \rightarrow S$  l'éclatement d'un point  $p$ . Soit  $m \geq 0$  la multiplicité de  $C$  en  $p$ , et  $C' \subset S'$  la transformée stricte de  $C$ . On a*

$$K_{S'} \cdot C' + C' \cdot C' = K_S \cdot C + C \cdot C - m(m-1);$$

$$p_a(C') = p_a(C) - \frac{m(m-1)}{2};$$

$$K_{S'} \cdot C' = K_S \cdot C + m.$$

*Preuve.* Le calcul est immédiat, à partir des relations établies précédemment :

$$K_{S'} = \pi^* K_S + E;$$

$$C' = \pi^* C - mE;$$

et en appliquant la proposition 14. □

## 4 Théorème de Noether

Le but de ce chapitre est de décrire un système agréable de générateurs pour le groupe de Cremona des transformations birationnelles de  $\mathbb{P}^2$ .

Je suis le livre [KSC04, §2.5].

### 4.1 Groupe de Cremona

On appelle groupe de Cremona le groupe  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  des applications birationnelles  $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ . Voici des exemples de telles transformations :

1. Le groupe  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$  correspond au sous-groupe des éléments biréguliers (i.e, sans point d'indétermination) de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  : voir exercice 9.
2. Le groupe  $\text{PGL}_2(\mathbb{C}) \times \text{PGL}_2(\mathbb{C})$  est la composante neutre du groupe des automorphismes biréguliers de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . Comme  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  est une surface birationnelle à  $\mathbb{P}^2$ ,  $\text{PGL}_2(\mathbb{C}) \times \text{PGL}_2(\mathbb{C})$  s'identifie à un sous-groupe de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ .
3. Le groupe  $\text{PGL}_2(\mathbb{C}(y)) \rtimes \text{PGL}_2(\mathbb{C})$  peut aussi être vu comme un sous-groupe de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  : dans une carte affine de coordonnées  $(x, y)$  on a

$$(x, y) \mapsto \left( \frac{\alpha(y)x + \beta(y)}{\gamma(y)x + \delta(y)}, \frac{ay + b}{cy + d} \right).$$

On appelle ces transformations des **applications de Jonquières**, elles correspondent aux transformations préservant le pinceaux des droites  $y = \text{constante}$ .

4. Le groupe  $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$  vu comme groupe des transformations monomiales :

$$(x, y) \mapsto (x^a y^b, x^c y^d).$$

5. Le groupe  $\text{Aut}(\mathbb{C}^2)$  des automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^2$ .

*Remarque 25.* Ce dernier sous-groupe  $\text{Aut}(\mathbb{C}^2)$  est déjà plutôt compliqué : pour s'en convaincre on peut remarquer qu'il contient un sous-groupe libre sur un continuum de générateurs, grâce à la construction suivante.

Considérons les automorphismes  $f : (x, y) \rightarrow (x + y^2, y)$  et  $a_t : (x, y) \rightarrow (x, tx + y)$  où  $t \in \mathbb{C}^*$ . Montrons que le groupe  $H$  engendré par les  $g_t = a_t \circ f \circ a_t^{-1}$  est isomorphe au groupe libre sur les  $g_t$ . Il s'agit de montrer que tout élément de  $H$  de la forme  $g_{t_1}^{k_1} \circ \dots \circ g_{t_n}^{k_n}$  avec  $k_i \in \mathbb{Z}^*$ ,  $t_i \in \mathbb{C}^*$  et  $t_i \neq t_{i+1}$  pour tout  $i$  est non trivial. Pour cela il suffit de constater que l'image de la droite à l'infini par un tel élément de  $H$  est un point.

### 4.2 Factorisation via des surfaces de Hirzebruch

*Définition 26.* Une **surface de Hirzebruch** est une surface munie d'un morphisme vers  $\mathbb{P}^1$  dont toutes les fibres sont isomorphes à  $\mathbb{P}^1$ . On note  $\mathbb{F}_n$ ,  $n \geq 1$ , une surface de Hirzebruch possédant une section d'auto-intersection  $-n$ , et  $\mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . Une section d'auto-intersection  $-n$  sur  $\mathbb{F}_n$  est dite exceptionnelle, on note  $s$  sa classe dans le groupe de Picard. On note  $f$  la classe d'une fibre. On a donc  $f \cdot f = 0$ ,  $s \cdot s = -n$  et  $f \cdot s = 1$ .

Exemples :

1. L'éclatement de  $\mathbb{P}^2$  produit  $\mathbb{F}_1$ .

2. Une transformation élémentaire (éclater un point, contracter une fibre) fait changer l'indice d'un.

*Exercice 15.* Montrer que le groupe de Picard d'une surface de Hirzebruch  $\mathbb{F}_n$  correspondant à l'un des deux exemples précédent est  $\mathbb{Z}f + \mathbb{Z}s$  (en fait c'est vrai en général, mais un peu plus dur à montrer : voir [Har77, p.370]).

Montrer que le diviseur canonique de  $\mathbb{F}_n$  est  $(-2 - n)f - 2s$  :

- (i) Par un calcul direct dans les cartes dans le cas  $n = 0$ ,
- (ii) En supposant  $\mathbb{F}_n$  construite par éclatement de  $\mathbb{P}^2$  suivi d'une suite de transformations élémentaires ;
- (iii) Dans le cas général, par adjonction ;

Cette section est consacrée à la preuve du

**Théorème 27** (voir [KSC04, Theorem 2.24 p.51]). *Toute transformation birationnelle  $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  est une composition des 4 types suivants de transformations :*

1. L'éclatement  $\pi: \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$  ;
2. Une transformation élémentaire  $\mathbb{F}_n \dashrightarrow \mathbb{F}_{n\pm 1}$  ;
3. L'inverse d'un éclatement  $\pi^{-1}: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{F}_1$  ;
4. L'involution  $\tau: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  échangeant deux facteurs.

Considérons  $\varphi: S \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  une transformation birationnelle, où  $S = \mathbb{P}^2$  ou  $\mathbb{F}_n$  pour un certain  $n$ . La transformation  $\varphi$  correspond à un système linéaire  $\Gamma$  sur  $S$  (préimages des droites au but) :

1. Si  $S = \mathbb{P}^2$ ,  $\Gamma \subset |d\ell|$ , où  $\ell$  est la classe d'une droite et  $d \geq 1$  ;
2. Si  $S = \mathbb{F}_n$ ,  $\Gamma \subset |af + ds|$ , où  $d \geq 1$  et  $a \geq nd$  (considérer l'intersection avec  $s$ , qui est positive).

On définit le **degré** de  $\varphi$  comme suit :

1. Si  $S = \mathbb{P}^2$ ,  $\deg(\varphi) = d/3$  ;
2. Si  $S = \mathbb{F}_n$ ,  $\deg(\varphi) = d/2$ .

Explication de la définition : "degré de  $\Gamma$  normalisé par le canonique"

1. Si  $S = \mathbb{P}^2$ ,  $\deg(\varphi) = \frac{\Gamma \cdot \ell}{-K_S \cdot \ell}$  ;
2. Si  $S = \mathbb{F}_n$ ,  $\deg(\varphi) = \frac{\Gamma \cdot f}{-K_S \cdot f}$  ;

**Lemme 28.** *Soit  $S = \mathbb{P}^2$  ou  $\mathbb{F}_n$ , et  $\varphi: S \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  une transformation birationnelle, associée à un système linéaire  $\Gamma$ . Supposons que  $\varphi$  ne soit pas un isomorphisme. Alors  $\Gamma$  admet un point de multiplicité strictement supérieur à  $\deg(\varphi)$ , sauf dans les deux cas suivants :*

- (i)  $S = \mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ , et  $\Gamma \subset |af + ds|$  avec  $a < d$  ;
- (ii)  $S = \mathbb{F}_1$ , et  $\Gamma \subset |af + ds|$  avec  $a/3 < d/2$ .

*Preuve.* Premier cas :  $S = \mathbb{P}^2$ .

En comparant à l'aide du lemme 24 l'auto-intersection et l'intersection avec le canonique d'un élément de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{P}^2$  et sur une résolution de  $\varphi$ , on obtient

$$\begin{aligned} \sum m_i^2 &= d^2 - 1; \\ \sum m_i &= 3d - 3 \end{aligned}$$



Supposons que les  $m_i$  sont tous  $\leq d/3$ , alors

$$d^2 - 1 = \sum m_i^2 \leq \frac{d}{3} \sum m_i = d^2 - d$$

qui vient contredire  $d > 1$  ( $\varphi$  n'est pas un isomorphisme).

Deuxième cas :  $S = \mathbb{F}_n$ . Dans ce cas

$$\begin{aligned} \Gamma^2 &= (af + ds)^2 = 2ad - nd^2; \\ K_{\mathbb{P}^2} \cdot \Gamma &= (af + ds)((-2-n)f - 2s) = -2d - nd - 2a + 2nd. \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum m_i^2 &= \Gamma^2 - 1 = d(2a - nd) - 1; \\ \sum m_i &= -K_S \cdot \Gamma - 3 = 2(a + d) - nd - 3. \end{aligned}$$

Supposons les  $m_i$  tous  $\leq d/2$ , alors

$$d(2a - nd) - 1 = \sum m_i^2 \leq \frac{d}{2} \sum m_i = d(a + d) - nd^2/2 - 3d/2.$$

Comme  $d \geq 1$ , on a  $1 - 3d/2 < 0$  et donc

$$d(2a - nd) < d(a + d) - nd^2/2.$$

En simplifiant par  $d$  et en regroupant les  $a$  :

$$a < d(1 + n/2).$$

Comme par ailleurs  $nd \leq a$ , on obtient  $n < n/2 - 1$ , soit  $n < 2$ .

Si  $n = 0$ , on a  $a < d$ .

Si  $n = 1$ , on a  $a/3 < d/2$ . □

**Lemme 29.** Soit  $\varphi: S \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  une transformation birationnelle, associée à un système linéaire  $\Gamma$ . Supposons que  $\Gamma$  admette un point  $p$  de multiplicité plus grande que le degré de  $\varphi$ .

1. Si  $S = \mathbb{P}^2$ , alors le degré de  $\varphi \circ \pi$  est strictement inférieur au degré de  $\varphi$ , où  $\pi: \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$  est l'éclatement de  $p$ ;
2. Si  $S = \mathbb{F}_n$ , alors les degrés de  $\varphi$  et  $\varphi \circ \alpha^{-1}$  sont égaux, où  $\alpha: \mathbb{F}_n \dashrightarrow \mathbb{F}_{n \pm 1}$  est la transformation élémentaire associée à  $p$ .

*Preuve.* Si  $S = \mathbb{P}^2$ , le système  $\Gamma'$  sur  $\mathbb{F}_1$  correspond à  $\pi^*d\ell - mE$ . D'autre part la classe d'une fibre sur  $\mathbb{F}_1$  est donnée par  $f = \pi^*\ell - E$ , et donc

$$\deg \Gamma' = \frac{\Gamma' \cdot f}{2} = \frac{d - m}{2} < \frac{3d - d}{6} = \frac{d}{3} = \deg \Gamma.$$

Si  $S = \mathbb{F}_n$  la transformation élémentaire  $\alpha$  est un isomorphisme au voisinage d'une fibre générale  $f$  et donc

$$\deg \Gamma' = \frac{\Gamma' \cdot f}{2} = \frac{\Gamma \cdot f}{2} = \deg \Gamma. \quad \square$$

*Preuve du théorème 27.* Soit  $S \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  une transformation birationnelle, toujours avec  $S$  isomorphe à  $\mathbb{P}^2$  ou une surface de Hirzebruch  $\mathbb{F}_n$ . On cherche à faire baisser son degré par l'une des 4 opérations listées dans l'énoncé.

- S'il n'y a pas de point base de multiplicité plus grande que le degré, on est dans l'une des situations exceptionnelles décrites dans le lemme 28.
- Si  $S = \mathbb{F}_0$ , alors en changeant de projection on échange les rôles de  $a$  et  $d$ , et le degré baisse puisque  $a < d$ .
- Si  $S = \mathbb{F}_1$  on contracte la section  $s$ . Le degré de la nouvelle application  $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  est  $a/3$ , et  $a/3 < d/2$ .
- Supposons maintenant qu'il y ait un point  $p$  de multiplicité  $m$  plus grande que le degré.
  - Si  $S = \mathbb{P}^2$ , alors on considère  $\mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$  l'éclatement de  $p$ . Le degré de la nouvelle transformation  $\mathbb{F}_1 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  est  $(d - m)/2 < d/3$ .
  - Si  $S = \mathbb{F}_n$ , alors on considère la transformation élémentaire associée à  $p$ . Le degré de la nouvelle transformation  $\mathbb{F}_{n\pm 1} \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  est inchangé, par contre la somme de toutes les multiplicités a chuté. En effet on a remplacé un point de multiplicité  $m$  par un point de multiplicité  $d - m$ , et  $m > d/2$ . On conclut par récurrence sur la somme des multiplicités qu'après un nombre fini de telles transformations élémentaires on se retrouve dans l'un des cas précédents.

□

*Exercice 16.* Soit  $S = \mathbb{P}^2$  ou  $\mathbb{F}_n$ , et  $\varphi: S \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  une transformation birationnelle. Supposons que  $p_1, p_2$  sont deux points bases de  $\varphi$ , avec  $p_2$  infiniment proche de  $p_1$  (c'est-à-dire que  $p_2$  est un point du diviseur exceptionnel  $E_1$  produit en éclatant  $p_1$ ). Soit  $m_1, m_2$  les multiplicités respectives de  $p_1$  et  $p_2$ . Montrer que  $m_1 \geq m_2$  (on a utilisé implicitement ce fait dans la preuve du théorème).

### 4.3 Théorème de Castelnuovo-Noether

On appelle transformation quadratique standard une involution associée à trois points distincts non alignés de  $\mathbb{P}^2$ . A conjugaison près par un automorphisme linéaire il s'agit donc de

$$[x : y : z] \dashrightarrow [yz : xz : xy].$$

**Théorème 30** (Noether-Castelnuovo). *Toute transformation birationnelle de  $\mathbb{P}^2$  est une composition d'automorphismes linéaires et de quadratiques standards.*

*Exercice 17.* Soit  $\varphi: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  une transformation birationnelle. Montrer que  $\varphi$  est quadratique si et seulement si elle admet exactement 3 points base (avec éventuellement certains infiniment proches). *Indication : utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Le théorème découle des trois propositions qui suivent.

**Proposition 31.** *Toute transformation quadratique est une composition d'automorphismes linéaires et de quadratiques standards.*

*Preuve.* Une transformation quadratique admet 3 points base  $p_1, p_2, p_3$ , chacun de multiplicité 1 (car  $\sum m_i^2 = \sum m_i = 3$ ).

Supposons que  $p_1, p_2$  sont des points distincts de  $\mathbb{P}^2$ , et  $p_3$  infiniment proche de  $p_1$ . En composant par une quadratique standard centrée en  $p_1, p_2, q$  avec  $q$  général (non alignés avec  $p_1, p_2$  ou  $p_1, p_3$ ), on obtient une quadratique standard.

Supposons  $p_2$  infiniment proche de  $p_1$ , et  $p_3$  infiniment proche de  $p_2$ . Soit  $q$  un point non aligné avec  $p_1, p_2$ . Alors il existe une transformation quadratique de point base  $p_1, p_2, q$ , et en composant par cette application on est ramené au cas précédent.  $\square$

Exemple d'applications quadratiques avec 1 ou 2 points infiniment proches :

$$\begin{aligned} [x : y : z] &\dashrightarrow [x^2 : yz : xz] \\ [x : y : z] &\dashrightarrow [xz + y^2 : yz : z^2] \end{aligned}$$

**Proposition 32.** *Toute transformation de Jonquières est une composition d'automorphismes linéaires et de transformations quadratiques.*

*Preuve.* On regarde une transformation de Jonquières comme une transformation

$$\alpha: \mathbb{F}_1 \dashrightarrow \mathbb{F}_1$$

envoyant fibre (générale) sur fibre.

Du coup la composition  $\pi \circ \alpha: \mathbb{F}_1 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  est associé à un système linéaire  $\Gamma$  vérifiant  $\Gamma \cdot f = 1$ , on a donc  $\Gamma \subset |af + s|$  avec de plus  $a \geq 1$  (car  $\Gamma \cdot s = a - 1 \geq 0$ ).

En conséquence tous les points bases sont de multiplicité 1. Il y en a  $2a - 2$  (car en général  $\sum m_i = 2(a + d) - nd - 3$ , et ici  $n = d = 1$ ).

Si  $a = 1$  alors il n'y a aucun point base et  $\alpha$  est un isomorphisme.

Si  $a > 1$  notons  $h \geq 0$  le nombre minimum d'éclatements nécessaires pour faire apparaître un point base hors du transformé strict de  $s$  (un tel point existe, car  $2a - 2 > a - 1$ ). On appelle  $h$  le niveau de  $\alpha$ .

Si  $h > 0$ , soit  $p \in s$  le centre sur  $\mathbb{F}_1$  d'un diviseur réalisant le minimum, et soit  $q \in \mathbb{F}_1$  général. Notons  $\alpha_{pq} = \alpha_q \circ \alpha_p$  la composée des transformations élémentaires associée à  $p$  et  $q$ . C'est une transformation de  $\mathbb{F}_1$  vers  $\mathbb{F}_1$  (via  $\mathbb{F}_2$ ), et le niveau de  $\alpha \circ \alpha_{pq}^{-1}$  chute de 1.

Si  $h = 0$ , Il existe  $p \in \mathbb{F}_1$  et pas sur  $s$ . Soit  $q$  un autre point base. Alors  $\alpha \circ \alpha_{pq}^{-1}$  est une transformation de  $\mathbb{F}_1$  vers  $\mathbb{F}_1$  (via  $\mathbb{F}_0$ ) qui a deux points base de moins.

On conclut par double récurrence sur le niveau et le nombre de points base, en remarquant que  $\mathbb{P}^2 \leftarrow \mathbb{F}_1 \xrightarrow{\alpha_{pq}} \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$  est dans tous les cas quadratique.  $\square$

**Proposition 33.** *Toute transformation birationnelle de  $\mathbb{P}^2$  est une composition de transformations de Jonquières et d'automorphismes linéaires.*

*Preuve.* Tout d'abord  $\mathbb{F}_1 \dashrightarrow \mathbb{F}_0 \rightarrow \mathbb{F}_0 \dashrightarrow \mathbb{F}_1$  et égal à  $\mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^2 \leftarrow \mathbb{F}_1$ . Ainsi dans le théorème 27 on peut se passer de l'involution  $\tau$ .

Maintenant une transformation admettant une factorisation de la forme

$$\mathbb{P}^2 \leftarrow \mathbb{F}_1 \dashrightarrow \dots \dashrightarrow \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$$

est de Jonquières (à automorphisme linéaire près au but).  $\square$

*Exercice 18.* Le théorème de Noether-Castelnuovo affirme que toute application birationnelle  $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  peut s'écrire comme composée d'applications birationnelles de degré 2. Pouvez-vous trouver une telle décomposition pour l'application de degré 3 qui est donnée par l'isomorphisme  $(x, y) \in \mathbb{A}^2 \rightarrow (x + y^3, y) \in \mathbb{A}^2$ ? Quel est le nombre minimal de quadratiques (resp. de quadratiques standards) dans une telle décomposition ?

## 5 Surfaces cubiques

Le but de ce chapitre est de montrer qu'une surface cubique lisse  $S \subset \mathbb{P}^3$  est isomorphe à  $\mathbb{P}^2$  éclaté en 6 points, et donc en particulier est rationnelle. On étudie également les droites contenues dans une telle surface.

### 5.1 Systèmes linéaires et applications rationnelles

Soit  $X$  une variété projective, et  $D$  un diviseur. On appelle système linéaire (complet) de  $D$  l'ensemble

$$|D| = \{D' \geq 0; D' \sim D\}$$

Montrons que  $|D|$  s'identifie naturellement à un espace projectif (d'où le nom de système *linéaire*, car paramétré par une variété de degré 1). Un diviseur  $D' \in |D|$  correspond à une fonction rationnelle  $f$  telle que  $D' - D = \text{Div}(f)$ . Considérons donc l'espace vectoriel

$$\mathcal{L}(D) = \{f; \text{Div}(f) + D \geq 0\}$$

On peut penser à  $\mathcal{L}(D)$  comme à un espace de fonctions rationnelles à pôles prescrits. Comme deux fonctions différents d'une constante multiplicative définissent le même diviseur, on a finalement  $|D| = \mathbb{P}(\mathcal{L}(D))$  (de dimension finie : admis).

Tout sous-espace linéaire d'un tel  $|D|$  s'appelle un système linéaire. Nous montrons maintenant qu'ils permettent d'encoder toutes les applications rationnelles  $X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ .

Soit  $\varphi: X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$  une application rationnelle. Alors les transformés par  $\varphi^{-1}$  des hyperplans de  $\mathbb{P}^n$  forme un système linéaire  $|H|$  de diviseurs. Remarquons de plus que les éléments de  $|H|$  n'ont pas de composante commune : si  $Y$  était une telle composante, il existerait  $y \in Y$  un point où  $\varphi$  est bien défini (le lieu d'indétermination est de codimension au moins 2), ainsi  $\varphi(y)$  serait un point contenu dans tout hyperplan de  $\mathbb{P}^n$ , absurde !

Réciproquement, soit  $\Gamma \subset |D|$  un système linéaire sans composante fixe ; alors il existe des fonctions  $f_0, \dots, f_s \in \mathcal{L}(D)$  tel que  $\Gamma = \mathbb{P}(V)$  où  $V \subset \mathcal{L}(D)$  est le sous-espace engendré par les  $f_i$ . Alors

$$\begin{aligned} \varphi: X &\dashrightarrow \mathbb{P}^s \\ x &\mapsto [f_0(x) : \dots : f_s(x)] \end{aligned}$$

est une application rationnelle dont les pull-backs des hyperplans sont les éléments de  $\Gamma$ . Remarquons que cette application est un morphisme ssi il n'existe pas de point commun à tous les diviseurs dans  $\Gamma$ . Un tel point s'appelle un point base, et un système linéaire définit donc un morphisme ssi il est sans point base. Si de plus  $\varphi$  définit un isomorphisme de  $X$  sur son image (on dit que  $\varphi$  est un plongement), le système linéaire correspondant (ou un membre  $D$  de ce système) est dit *très ample*.

Cela revient à demander que pour tout couple de points  $p, q$  il existe  $D_1, D_2$  des membres du système linéaires contenant respectivement  $p$  mais pas  $q$ , et  $q$  mais pas  $p$  (aussi bien quand  $p, q$  sont des points de  $X$ , ou des points infiniment proches d'un même troisième).

### 5.2 Systèmes de courbes avec points base prescrits

Pour cette section voir [Har77, §V.4 p. 395]. On considère des systèmes linéaires données par des courbes de  $\mathbb{P}^2$  de degré donné et passant par des points prescrits. Noter que la condition

“passer par un point  $p$ ” correspond à un hyperplan dans l’espace des courbes de degré  $d$ , ainsi nous sommes bien en train de considérer des systèmes linéaires (et non des familles algébriques de degré plus grand, comme ce serait le cas si on demandait par exemple “être tangent à telle conique”).

**Proposition 34.** *Soit  $\Gamma$  le système linéaire des coniques passant par 4 points  $p_1, p_2, p_3, p_4$  de  $\mathbb{P}^2$ . Supposons que trois des  $p_i$  ne sont jamais alignés. Soit  $S$  la surface obtenue en éclatant  $p_1, \dots, p_4$ . Alors le transformé du système sur  $S$  est sans point base.*

*Preuve.* Il suffit de montrer que le système est de dimension au moins 1 et contient une conique  $C$  irréductible, en effet la transformée stricte de  $C$  est alors d’auto-intersection 0 ce qui revient à dire qu’elle n’intersecte pas les autres membres du système.

Choisissons un point  $q$  qui n’appartient à aucune des droites  $(p_i, p_j)$ . Alors il existe une conique passant par  $p_1, \dots, p_4, q$  : l’espace des coniques est paramétré par  $\mathbb{P}^5$ , et “passer par un point” correspond à un hyperplan. Cette conique est nécessairement irréductible (sinon trois des points seraient alignés). En changeant  $q$  on obtient plus d’une telle conique dans le système, qui est donc bien de dimension au moins 1.  $\square$

*Exercice 19.* Dédurre de la proposition que par 5 points de  $\mathbb{P}^2$  il passe une conique, unique ssi quatre de ces points ne sont jamais alignés, et irréductible ssi trois de ces points ne sont jamais alignés.

**Proposition 35.** *Soit  $\Gamma$  le système linéaire des cubiques de  $\mathbb{P}^2$  passant par 7 points  $p_1, \dots, p_7$  (avec au plus un point infiniment proche). Supposons que quatre des  $p_i$  ne sont jamais alignés, et les sept ne sont pas sur une même conique. Alors le transformé du système sur la surface  $S$  obtenue en éclatant  $p_1, \dots, p_7$  est sans point base.*

*Preuve.* Soit  $q$  un point de  $S$ , qu’on identifie à un point (éventuellement infiniment proche) de  $\mathbb{P}^2$ . Il faut trouver une cubique passant par les  $p_i$  mais pas par  $q$ .

*Premier cas.* Supposons qu’il existe trois points, disons  $p_1, p_2, p_3$ , qui sont alignés avec  $q$  sur une droite  $L$ . Les  $p_i$  restants ne sont pas tous alignés, on peut donc supposer quitte à renuméroter que  $p_4, p_5, p_6$  ne sont pas alignés. Une conique  $\Gamma_{12456}$  passant par  $p_1, p_2, p_4, p_5, p_6$  ne contient pas  $q$  : si c’était le cas, elle serait réductible avec une composante égale à la droite  $L$ , et l’autre à une droite contenant  $p_4, p_5, p_6$ . De même la droite  $L_{37}$  passant par  $p_3$  et  $p_7$  ne contient pas  $q$  : sinon,  $p_7 \in L$  et on aurait 4 points alignés.

NB : si l’un des  $p_i$  est infiniment proche, on peut supposer quitte à renuméroter que c’est  $p_2$  au-dessus de  $p_1$ ,  $p_5$  au-dessus de  $p_6$  ou  $p_7$  au-dessus de  $p_3$ , et la construction fait encore sens.

*Deuxième cas.* Supposons que  $q$  n’est pas aligné avec trois des  $p_i$ , mais qu’il existe une conique (nécessairement irréductible)  $\Gamma$  contenant  $q$  et six des  $p_i$ , disons  $p_1, \dots, p_6$ . Alors la cubique  $\Gamma_{12347} \cup L_{56}$  ne contient pas  $q$  : en effet si  $q \in \Gamma_{12347}$ , alors  $\Gamma = \Gamma_{12347}$  contiendrait tous les  $p_i$  ; et si  $q \in L_{56}$  alors  $\Gamma$  serait réductible.

NB : si l’un des  $p_i$  est infiniment proche, on peut supposer quitte à renuméroter que c’est  $p_7$  au-dessus de  $p_1$ , ou  $p_5$  au-dessus de  $p_6$ , et la construction fait encore sens.

*Troisième cas.* Supposons que  $q$  n’est pas aligné avec trois des  $p_i$ , et n’est pas sur une conique contenant six des  $p_i$ . S’il y a un point infiniment proche, supposons que c’est  $p_2$  au-dessus de  $p_1$ . Considérons alors les cubiques  $C_i = \Gamma_{1234i} \cup L_{jk}$ ,  $i = 5, 6, 7$ . Le point  $q$  appartient à au plus une des droites  $L_{jk}$  (sinon  $q, p_5, p_6, p_7$  seraient alignés), on peut donc supposer  $q \notin L_{57}$  et  $q \notin L_{67}$ . Si  $q \notin C_5$  ou  $C_6$  on a gagné, supposons donc  $q \in C_5 \cap C_6$  et cherchons une contradiction.

On a  $q \in \Gamma_{12345} \cap \Gamma_{12346}$ . Si l'une de ces deux coniques est irréductible, alors elles sont égales et contiennent  $q$  et six des  $p_i$ , contradiction. Si les deux coniques sont réductibles, alors  $q$  est aligné avec trois des  $p_i$  (essentiellement deux cas à considérer :  $q$  sur  $L_{12}$ , ou  $q$  sur  $L_{45}$ ) : contradiction. □

**Corollaire 36.** Soit  $\Gamma$  le système linéaire des cubiques passant par 6 points  $p_1, \dots, p_6$  de  $\mathbb{P}^2$ . Supposons que trois des  $p_i$  ne sont jamais alignés, et les six ne sont pas sur une même conique. Alors le transformé du système sur la surface  $S$  obtenue en éclatant  $p_1, \dots, p_6$  est très ample. On obtient ainsi un plongement  $S \rightarrow \mathbb{P}^3$  dont l'image est une surface cubique lisse.

*Preuve.* Soit  $q_1, q_2$  deux points de  $S$ . La proposition 35 s'applique à  $p_1, \dots, p_6, q_1$ . En particulier il existe une cubique passant par ces 7 points mais pas par  $q_2$ .

Dans le cas où  $q_1, q_2$  sont infiniment proches d'un même  $q$  : on applique la proposition 35 à  $p_1, \dots, p_6, q$ . □

*Exercice 20.* Montrer que le système linéaire des cubiques par huit points (aussi généraux que l'on veut) de  $\mathbb{P}^2$  possède un neuvième point base non prescrit.

Cherchons à déterminer les droites contenues dans une surface cubique  $S$  produite par le corollaire 36. Si  $C \subset S$  est une droite, par adjonction on a

$$-2 = K_S \cdot C + C^2 = -1 + C^2$$

ainsi on obtient que l'auto-intersection de  $C$  dans  $S$  est  $-1$ . Les droites de  $S$  sont ainsi caractérisées par les équations  $C^2 = -1$  et  $K_S \cdot C = -1$  (car cela force le genre arithmétique à être nul, et donc la courbe à être lisse de genre géométrique nul).

Les six diviseurs exceptionnels sont donc des droites. Toute autre droite  $C$  provient d'une courbe de  $\mathbb{P}^2$  de degré  $d$  et de multiplicité  $m_i$  en chaque  $p_i$ . On obtient les équations (intersection avec  $-K_S$ , auto-intersection) :

$$\begin{aligned} 1 &= 3d - \sum m_i \\ -1 &= d^2 - \sum m_i^2 \end{aligned}$$

Par Cauchy-Schwarz :

$$\left(\sum m_i\right)^2 = \left(\sum 1 \cdot m_i\right)^2 \leq \sum 1^2 \sum m_i^2 = 6 \sum m_i^2.$$

En remplaçant par les expressions ci-dessus :

$$(3d - 1)^2 \leq 6(d^2 + 1)$$

soit

$$3d^2 - 6d - 5 \leq 0$$

ou encore

$$3d(d - 2) \leq 5$$

On voit que seul  $d = 1$  ou  $d = 2$  sont possibles. Pour  $d = 1$  on a  $\sum m_i = \sum m_i^2 = 2$ , c'est une droite passant par deux des  $p_i$  (il y en a 15). Pour  $d = 2$  on a  $\sum m_i = \sum m_i^2 = 5$ , c'est une conique passant par cinq des  $p_i$  (il y en a 6).

On a obtenu ainsi des exemples de surfaces cubiques lisses avec exactement 27 droites.

- Exercice 21.*
1. Montrer que sur la surface  $S$  obtenu en éclatant 3 points distincts de  $\mathbb{P}^2$  il y a exactement 6 courbes rationnelles d'auto-intersection  $-1$ .
  2. Combien  $S$  admet-elle de  $-1$  courbes si maintenant  $S$  est l'éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en 4 points ? en 5 points ?
  3. Quel est le plongement donné par le système des cubiques passant par 5 points (suffisamment généraux) de  $\mathbb{P}^2$  ?

### 5.3 Existence d'une droite sur une surface cubique lisse

Je donne une preuve "classique", en admettant pas mal de choses (avec références à Shafarevich). Il existe une preuve "à la main" dans [Rei88, p. 102].

La variété des droites dans  $\mathbb{P}^3$  est une variété projective (admis : c'est la grassmannienne  $G(1,3)$ , qui se trouve être isomorphe à une quadrique de  $\mathbb{P}^5$ ) de dimension 4 (se voit en paramétrant les droites par les points d'intersections avec deux plans donnés).

D'autre part la variété des hypersurfaces de degré  $d$  dans  $\mathbb{P}^3$  est un espace projectif de dimension  $N_d = \frac{(d+3)(d+2)(d+1)}{6} - 1$ . Il s'agit de compter les monômes de degré  $d$  en 4 variables, on peut les écrire sous la forme  $x_0^{a_0-1} x_1^{a_1-1} x_2^{a_2-1} x_3^{a_3-1}$  et donc chercher les  $1 \leq a_i$  de somme  $\sum a_i = d + 4$ . Cela revient à placer 3 coupures distinctes dans une file de  $d + 4$  objets, d'où le résultat.

En particulier :

- La dimension des surfaces quadriques est  $N_2 = 9$  ;
- La dimension des surfaces cubiques est  $N_3 = 19$  ;

Maintenant, on considère les couples  $(\ell, S)$  où  $\ell$  est une droite de  $\mathbb{P}^3$  et  $S$  est une surface de degré  $d$ . La condition  $\ell \subset S$  est une condition algébrique (admis : voir [Sha94, p. 78]), on obtient ainsi une variété  $\Gamma_d$  irréductible (admis : cela vient du fait que la projection vers l'espace des droites est un morphisme vers une variété irréductible dont toutes les fibres ont même dimension, voir [Sha94, p. 77]) dont on va calculer la dimension.

Calculons d'abord la dimension de la fibre de la projection vers l'espace des droites : autrement dit, la dimension de l'espace des surfaces de degré  $d$  contenant une droite donnée. Considérons la droite  $\ell$  donnée par  $X_0 = X_1 = 0$ , alors les surfaces ne contenant *pas*  $\ell$  correspondent aux surfaces faisant intervenir un monôme en  $X_2, X_3$ . La codimension de la fibre dans  $\Gamma_d$  est donc  $d + 1$ , et comme l'espace des droites est de dimension 4, on a finalement  $\dim \Gamma_d = N_d - d + 3$ .

On utilise maintenant le fait (voir [Sha94, p. 76]) que la dimension des fibres d'un morphisme rationnel est semi-continue, au sens où elle ne peut qu'augmenter sur les fibres particulières (l'exemple de l'éclatement d'un point est typique) ; de plus la dimension de la fibre générique est la différence entre la dimension de l'espace et la dimension de l'image.

Pour  $d = 2$ , on a donc  $\dim \Gamma_2 = 10 > 9 = N_2$ , et la dimension des fibres de la projection vers l'espace des quadriques est donc au moins 1 : on retrouve que toute quadrique contient une infinité de droites.

Pour  $d > 3$ , on a  $\dim \Gamma_d < N_d$ , on en déduit qu'il existe un ouvert de Zariski de surfaces de degré  $d$  qui ne contiennent aucune droite.

Pour  $d = 3$ , on a  $\dim \Gamma_3 = N_3 = 19$ . D'autre part on sait que la dimension de la fibre générale est 0 (on a construit dans le paragraphe précédent des surfaces cubiques avec exactement 27 droites). On en conclut que la projection est surjective, autrement dit toute surface cubique contient au moins une droite (Voir [Sha94, p. 80]).

## 5.4 Surfaces cubiques lisses

Soit  $S$  une surface cubique lisse, on sait par le paragraphe précédent qu'elle contient au moins une droite.

**Proposition 37** (Voir [Rei88]). *Soit  $\ell$  une droite contenue dans une surface cubique lisse  $S \subset \mathbb{P}^3$ . Alors il existe exactement 10 autres droites sur la surface  $S$  qui sont sécantes à  $\ell$ ; on peut les grouper en 5 paires  $(\ell_i, \ell'_i)$  tel que :*

1. Pour tout  $i$ , les droites  $\ell$ ,  $\ell_i$  et  $\ell'_i$  sont coplanaires ;
2. Pour tout  $i \neq j$ , les paires  $\ell_i \cup \ell'_i$  et  $\ell_j \cup \ell'_j$  sont disjointes.

*Preuve.* Si  $\ell_1 \subset S$  est une droite sécante à  $\ell$ , alors le plan contenant  $\ell$  et  $\ell_1$  coupe  $S$  le long d'une cubique qui est l'union de trois droites, ce qui donne une troisième droite  $\ell'_1$  elle aussi sécante. Il s'agit donc de compter combien de plans par  $\ell$  correspondent à une cubique union de trois droites.

On peut supposer que la droite  $\ell$  est la droite d'équation  $z = t = 0$ . L'équation de  $S$  est alors de la forme  $f = 0$  avec

$$f = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$$

où  $A, B, C, D, E, F$  sont homogènes en  $z, t$ .

Dans un plan  $\lambda z + \mu t = 0$ , cette équation est celle d'une conique, qui est singulière ssi le déterminant

$$\det \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} = 0.$$

Comme  $A, B, C$  sont linéaires,  $C, D$  quadratiques et  $F$  cubique, ce déterminant  $\Delta(z, t)$  est homogène en  $z, t$  de degré 5 et admet donc 5 racines. Il s'agit de voir que ces 5 racines sont simples.

On peut supposer que  $z$  est un facteur du déterminant, on veut montrer que  $z^2$  n'est pas un facteur.

Premier cas : les deux droites de la conique singulière  $f = z = 0$  sont deux droites  $\ell_1, \ell'_1$  dont le point d'intersection est hors de  $\ell$ . On peut supposer  $\ell_1 = \{x = z = 0\}$  et  $\ell'_1 = \{y = z = 0\}$ . Cela revient à supposer  $B = t$ , et  $z$  divise  $A, C, D, E, F$ . Alors on a  $\Delta(z, t) = -t^2 F \pmod{z^2}$ . Le point  $\ell_1 \cap \ell'_1 = [0 : 0 : 0 : 1]$  est dans  $S$ . Comme ce point est lisse pour  $S$ , quand on prend  $t = 1$  il doit rester un terme linéaire en  $x, y, z$ , qui ne peut venir que de  $F$ . En particulier  $z^2$  n'est pas un facteur de  $F$ , et donc pas de  $\Delta$  non plus.

Deuxième cas : les deux droites  $\ell_1, \ell'_1$  ont leur point d'intersection sur  $\ell$ . On peut supposer  $\ell_1 = \{x = z = 0\}$  et  $\ell'_1 = \{x - t = z = 0\}$ . Cela revient à supposer  $A = t$ ,  $D = -t^2 + z(\dots)$  et  $z$  divise  $B, C, E, F$ . Alors  $\Delta(z, t) = t^4 C \pmod{z^2}$ . Le point  $\ell_1 \cap \ell'_1 = [0 : 1 : 0 : 0]$  est lisse dans  $S$ ; quand on prend  $y = 1$  il doit rester un terme linéaire en  $x, z, t$ , qui ne peut venir que de  $C$ . Ainsi  $C = \text{cte } z$  n'est pas identiquement nul, et  $\Delta(z, t) \neq 0 \pmod{z^2}$ .  $\square$

**Corollaire 38.** *Toute surface cubique lisse contient deux droites  $\ell, \ell'$  disjointes.*

**Proposition 39.** *Soit  $S$  une surface cubique lisse, et  $\ell, \ell'$  deux droites disjointes de  $S$ . Alors  $S$  est isomorphe à  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  éclaté en 5 points.*



*Preuve.* On identifie  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  à  $\ell \times \ell'$ . On construit une application birationnelle de  $\ell \times \ell'$  vers  $S$  en associant à un couple  $(p, p')$  l'unique 3ème point d'intersection  $q$  de  $S$  avec la droite passant par  $p$  et  $p'$ . Cette application est bien définie sauf quand la droite  $(p, p')$  est l'une des 5 droites de  $S$  sécantes à la fois à  $\ell$  et  $\ell'$ . Ainsi on a un isomorphisme entre  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \{5 \text{ points}\}$  et  $S \setminus \{5 \text{ droites}\}$ .

L'application réciproque consiste pour chaque point  $q$  de  $S$  à considérer l'unique droite passant par  $q$  et sécante à  $\ell, \ell'$ , et à associer les deux points d'intersection  $(p, p')$  (si  $q$  est sur l'une des droites, on considère l'unique tangente à  $S$  en  $q$  sécante à l'autre droite). Cette réciproque est un morphisme.  $\square$

**Théorème 40.** *Toute surface cubique lisse est isomorphe à  $\mathbb{P}^2$  éclaté en 6 points, et contient donc exactement 27 droites.*

Se déduit de la construction précédente, ou directement comme suit :

Si une surface cubique  $S$  contient deux droites disjointes  $L_1, L_2$ , alors on peut définir une application birationnelle vers  $\mathbb{P}^2$  : à  $x \in S$ , on associe l'unique droite passant par  $x$  et sécante à  $L_1$  et  $L_2$ , et on prend l'intersection avec un plan  $H \simeq \mathbb{P}^2$  de  $\mathbb{P}^3$ . (Voir [Sha94, p. 39]).

## 6 Solides quartiques

Le but de ce chapitre est de montrer qu'une quartique lisse de  $\mathbb{P}^4$  n'est pas rationnelle. On suit la preuve "élémentaire" exposée dans [Puk07].

### 6.1 Théorie de l'intersection et éclatement en dimension 3

#### 6.1.1 Intersection

En dimension 3 il est naturel de définir un nombre d'intersection entre un diviseur  $D$  et un 1-cycle  $C$ , via la recette suivante :

Choisir  $D' \sim D$  dont le support ne rencontre plus les singularités de  $C$ , définir l'intersection en  $p$  entre un diviseur  $D$  d'équation locale  $f$  et une courbe lisse en  $p$  comme la multiplicité du zéro ou pôle de  $f|_C$ , et prolonger par linéarité.

On a les propriétés :

- (i)  $D \cdot C = D' \cdot C$  si  $D \sim D'$ .
- (ii) Si  $f: X \rightarrow Y$  est un morphisme birationnel, et  $D$  est un diviseur sur  $Y$ ,  $C$  une courbe sur  $X$ , on a la formule de projection

$$f^*D \cdot C = D \cdot f_*C$$

#### 6.1.2 Eclatement d'un point

En choisissant un système de coordonnées locales, on se ramène au cas de l'éclatement de l'origine dans  $\mathbb{C}^3$ . On prend des coordonnées  $x_1, x_2, x_3$  sur  $\mathbb{C}^3$ , et  $y_1, y_2, y_3$  sur  $\mathbb{P}^2$ , et on considère  $\Gamma \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{P}^2$  défini par les équations (non triviales quand  $i \neq j$ ) :

$$x_i y_j = x_j y_i.$$

On voit que la projection  $\pi: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^3$  est un isomorphisme au-dessus de  $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ , et contracte un diviseur exceptionnel  $E \simeq \mathbb{P}^2$  sur l'origine.

On peut voir l'éclatement comme le recollement de trois cartes affines, où  $\pi$  s'exprime sous la forme  $(u, v, w) \mapsto (u, uv, uw)$ .

On définit de même l'éclatement  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  d'un point  $p$  sur une 3-variété lisse  $X$ . Comme en dimension 2 en calculant dans une carte on peut exprimer le canonique de l'éclaté :

$$K_{\tilde{X}} = \pi^* K_X + 2E.$$

### 6.1.3 Eclatement d'une courbe.

Un phénomène nouveau en dimension 3 est qu'on peut aussi éclater des courbes. En choisissant un système de coordonnées locale, on se ramène au cas de l'éclatement de l'axe  $x_2 = x_3 = 0$  dans  $\mathbb{C}^3$ .

Le calcul du canonique est dans ce cas

$$K_{\tilde{X}} = \pi^* K_X + E.$$

*Exercice 22.* Soit  $C \subset \mathbb{C}^3$  la courbe  $xy = z = 0$  (union de deux axes de coordonnées). Considérons  $\Gamma \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{P}^1$  défini par

$$\Gamma = \{(x, y, z), [u, v]; xyv = zu\}$$

et soit  $\pi: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^3$  la projection sur le premier facteur.

1. Quelle est la préimage par  $\pi$  d'un point de  $\mathbb{C}^3 \setminus C$  ? D'un point lisse de  $C$  ? De l'origine ?
2. Montrer que  $\Gamma$  admet exactement un point singulier.
3. Donner une construction analogue si  $C$  est maintenant une cubique nodale dans le plan  $z = 0$ .

## 6.2 Énoncé du résultat principal et inégalité de Noether-Fano

**Théorème 41.** *Il n'existe pas de transformation birationnelle d'une quartique lisse de  $\mathbb{P}^4$  vers  $\mathbb{P}^3$ .*

Tout la suite du chapitre est consacrée à une preuve par l'absurde de ce théorème.

Soit  $V \subset \mathbb{P}^4$  une quartique lisse, et supposons que  $\varphi: V \dashrightarrow \mathbb{P}^3$  est birationnelle. On note  $|H|$  le système linéaire des plans sur  $\mathbb{P}^3$ ,  $|H_V|$  son transformé strict sur  $V$  ("H" pour "homaloïdal"). Le système  $|H_V|$  est sans composante fixe, et  $H_V \sim -dK_V$  pour un certain  $d \geq 1$  (noter que  $-K_V$  correspond à une section hyperplane, par adjonction). On dira que  $d$  est le degré de  $\varphi$ .

Considérons une résolution de  $\varphi$  ( $p$  est une suite d'éclatements de points ou de courbes lisses,  $q$  est un morphisme birationnel).

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ p \swarrow & & \searrow q \\ V & \dashrightarrow \varphi & \mathbb{P}^3 \end{array} \tag{1}$$

et écrivons les formules de ramification :

$$\begin{aligned} K_Z &= p^* K_V + \sum a_i E_i \\ H_Z &= p^* H_V - \sum m_i E_i. \end{aligned}$$

On a donc

$$K_Z + \frac{1}{d}H_Z = p^* \left( K_V + \frac{1}{d}H_V \right) + \sum \left( a_i - \frac{m_i}{d} \right) E_i = \sum \left( a_i - \frac{m_i}{d} \right) E_i.$$

Si  $a_i - \frac{m_i}{d} < 0$ , on dit que  $E_i$  est une *singularité maximale*, et que le centre de  $E_i$  sur  $V$ , i.e.  $p(E_i)$ , est un *centre maximal*.

**Proposition 42** (Noether-Fano). *Il existe une singularité maximale pour  $\varphi$ .*

*Preuve.* Soit  $\ell \subset \mathbb{P}^3$  une droite générale (sur  $\mathbb{P}^3$  au but) ; en particulier la transformée stricte  $\ell$  de  $\ell$  sur  $Z$  n'intersecte aucun des  $E_i'$  et on a (formule de projection)

$$\left( K_Z + \frac{1}{d}H_Z \right) \cdot \ell = \left( K_{\mathbb{P}^3} + \frac{1}{d}H \right) \cdot \ell < 0.$$

Comme  $K_V + \frac{1}{d}H_V = 0$ , on a  $K_Z + \frac{1}{d}H_Z = \sum \left( a_i - \frac{m_i}{d} \right) E_i$ .

On peut supposer que  $\ell$  n'est contenue dans aucun  $E_i$ , ainsi  $E_i \cdot \ell \geq 0$  pour tout  $i$ . En conclusion  $a_i - \frac{m_i}{d} < 0$  pour au moins un indice  $i$ .  $\square$

*Exercice 23.* 1. Sur le même modèle, énoncer et prouver une inégalité de Noether-Fano pour une transformation birationnelle de  $\mathbb{P}^2$  dans  $\mathbb{P}^2$  ou de  $\mathbb{P}^3$  dans  $\mathbb{P}^3$ .

2. Trouver une singularité maximale pour la transformation quadratique de  $\mathbb{P}^3$  dans  $\mathbb{P}^3$

$$[x : y : z : t] \dashrightarrow [xt + y^2 : yt : zt : t^2].$$

### 6.3 Le centre maximal n'est pas une courbe de $V$

**Proposition 43** ([KSC04, Theorem 5.11]). *Soit  $W \subset V$  un centre maximal ( $W$  est un point ou une courbe). Alors la multiplicité de  $H$  en tout point de  $W$  est strictement plus grande que  $d$ .*

*Preuve.* Soit  $E$  un diviseur exceptionnel, et soit  $g_r = f_r \circ \dots \circ f_1$  une suite d'éclatements extrayant directement  $E$ . On pose  $V_0 = V$ ,  $V_i$  la variété intermédiaire. Supposons que la multiplicité de  $H$  le long du centre  $W$  de  $E$  sur  $V$  est  $\leq d$ . Alors la multiplicité de  $H$  le long du centre  $W_i$  de  $E$  sur  $V_i$  est aussi  $\leq d$  (Exercice). Montrons par récurrence que  $K_{V_i} + \frac{1}{d}H_{V_i}$  est effectif (et donc en particulier, en prenant  $i = r$ ,  $E$  n'est pas un centre maximal), on aura ainsi montré la proposition par contraposée.

C'est clair pour  $i = 0$  :  $K_V + \frac{1}{d}H_V$  est trivial.

Supposons le résultat vrai pour  $i$ . On a

$$\begin{aligned} K_{V_{i+1}} &= f_i^* K_{V_i} + \alpha_i E_{i+1} \\ H_{V_{i+1}} &= f_i^* H_{V_i} - \mu_i E_{i+1} \end{aligned}$$

avec  $\alpha_i = 1$  ou  $2$  (éclatement d'une courbe ou d'un point), et  $\mu_i = \text{mult}_{W_i} H_i \leq d$ . On a donc

$$K_{V_{i+1}} + \frac{1}{d}H_{V_{i+1}} = f_i^* \left( K_{V_i} + \frac{1}{d}H_{V_i} \right) + \left( \alpha_i - \frac{\mu_i}{d} \right) E_{i+1}$$

qui est effectif.  $\square$

D'un autre côté on a le lemme :

**Lemme 44** ([KSC04, Lemma 5.36], [Puk07, Lemma 2.1]). *Soit  $H$  un diviseur effectif sur la quartique  $V$  donné par l'intersection avec une hypersurface de degré  $d$ . Alors la multiplicité de  $H$  le long d'une courbe quelconque  $C \subset V$  est au plus  $d$ .*

*Preuve.* Sur  $V$  on a  $H \cdot C = d \deg C$ . On calcule maintenant ce nombre d'une autre manière. Considérons  $\Sigma$  le cône sur  $C$  et de sommet un point  $y$  de  $\mathbb{P}^4$  : c'est une surface dans  $\mathbb{P}^4$ . On suppose  $y$  général, au sens où si  $z$  est un point de  $C$ , la droite  $L_{yz}$  n'est pas une bisécante (ni une tangente) de  $C$ , et n'est pas tangente à  $V$  si  $z$  est singulier.

L'intersection de  $\Sigma$  avec la quartique  $V$  est égal à  $C$  plus une courbe résiduelle  $R$ . On a, sur  $X$ ,

$$\begin{aligned} H \cdot C &= H \cdot (C + R) - H \cdot R \\ &= H \cdot \Sigma \cdot V - H \cdot R \\ &= 4d \deg C - H \cdot R. \end{aligned}$$

Par ailleurs  $H \cdot R \geq (\text{mult}_C H)(\#(R \cap C))$ .

Montrons que  $\#(R \cap C) = \deg C(\deg V - 1) = 3 \deg C$ . Si  $z$  est un point lisse de  $C$ , alors  $z \in R$  ssi  $L_{yz} \cdot (R \cup C) \geq 2$  dans  $\Sigma$ , ce qui revient à  $L_{yz} \cdot V \geq 2$  dans  $\mathbb{P}^4$ , ce qui veut dire que  $L_{yz}$  est une droite tangente à la quartique  $V$ . Si  $F = 0$  est l'équation homogène de degré 4 de  $V$ , et  $y = [y_0 : \dots : y_4]$ , alors  $y$  est solution de

$$\sum \partial_i F(z)(y_i - z_i) = 0$$

Comme on a  $\sum \partial_i F(z)z_i = 4F(z) = 0$ , on en déduit  $\sum \partial_i F(z)y_i = 0$ , qui est de degré 3 en les  $z_i$  (+ argument type Bertini pour voir que les intersections sont transverses ?). Finalement

$$d \deg C = H \cdot C \leq 4d \deg C - (\text{mult}_W D)3 \deg C$$

d'où  $\text{mult}_W D \leq d$ . □

On en déduit

**Corollaire 45.** *Tout centre maximal est un point de  $V$ .*

On a utilisé le

**Théorème 46** (Bertini). *Le membre générique d'un système linéaire est lisse en dehors du lieu base.*

*Preuve.* (voir Griffiths-Harris, p.137). Il suffit de prouver le théorème pour un pinceau, c'est à dire pour un système linéaire qui s'écrit localement

$$D_a = \{f(z_1, \dots, z_n) + ag(z_1, \dots, z_n) = 0\}$$

Supposons que  $p_a$  soit un point de singulier de  $D_a$  ( $a \neq 0, \infty$ ) et ne soit pas dans le lieu base :

$$\begin{aligned} f(p_a) + ag(p_a) &= 0 \\ \partial_i f(p_a) + a\partial_i g(p_a) &= 0 \end{aligned}$$

Comme  $p_a$  n'est pas dans le lieu base,  $f(p_a) \neq 0$  et  $g(p_a) \neq 0$ , ainsi  $-a = (f/g)(p_a)$ . On a donc  $\partial_i f(p_a) - (f/g)(p_a)\partial_i g(p_a) = 0$ , ce qui implique

$$\partial_i (f/g)(p_a) = 0$$

Ainsi la fonction  $f/g$  est constante sur le lieu des points singuliers mais non base, ainsi seul un nombre fini de  $D_a$  peuvent contenir un tel point. □

## 6.4 Résolution d'une singularité maximale centrée en un point

Considérons une suite d'éclatements qui consiste à éclater le centre de la singularité maximale jusqu'à produire le diviseur  $E$  réalisant la singularité.

$$V_K \rightarrow \cdots \rightarrow V_L \rightarrow \cdots \rightarrow V_1 \rightarrow V_0 = V$$

Les premiers  $L \geq 1$  éclatements sont des éclatements de points, et les derniers  $K - L \geq 0$  des éclatements de courbes (éventuellement singulières, mais dans la preuve on va prendre soin de ne jamais travailler sur les  $V_{L+1}, \dots, V_K \dots$ )

On note  $E_1, \dots, E_K$  les diviseurs exceptionnels,  $\mu_i$  les multiplicités des transformés de  $H$ ,  $\alpha_i = 1$  ou  $2$  les discrédances (coefficients du canonique dans les formules de ramification).

On construit le graphe (orienté) de la résolution, et on note  $p_{ij}$  le nombre de chemins orientés de  $E_i$  vers  $E_j$  ( $p_{ij} = 0$  si  $i < j$ , et  $p_{ii} = 1$ ).

**Lemme 47.** *Dans les formules de ramification*

$$\begin{aligned} K_Z &= p^* K_V + \sum a_i E_i \\ H_Z &= p^* H_V - \sum m_i E_i. \end{aligned}$$

on a

$$a_i = \sum_{j \leq i} p_{ij} \alpha_j \quad \text{et} \quad m_i = \sum_{j \leq i} p_{ij} m_j$$

*Preuve.* Je fais la preuve pour  $a_i$  (celle pour  $m_i$  est similaire), par récurrence sur le nombre  $k$  d'éclatements.

Si  $k = 1$ , on a  $K_Z = p^* K_V + \alpha_1 E_1$ , ok car  $p_{11} = 1$ .

Maintenant, considérant l'éclatement produisant  $E_k$ , on a

$$a_k = \sum_{i \leftarrow k} a_i + \alpha_k$$

Par hypothèse de récurrence

$$a_k = \sum_{i \leftarrow k} \sum_{j \leq i} p_{ij} \alpha_j + \alpha_k$$

Il s'agit de voir que c'est égal à

$$\sum_{j \leq k} p_{kj} \alpha_j$$

Montrons que les coefficients de chaque  $\alpha_j$  coïncident ; c'est bon pour  $j = k$ , et pour  $j < k$  cela revient à vérifier :

$$p_{kj} = \sum_{i \leftarrow k} p_{ij}$$

Cette dernière égalité est claire : compter les chemins de  $k$  vers  $j$  peut se faire en groupant les chemins suivant le premier pas du chemin.  $\square$

Notons simplement  $p_i$  pour  $p_{Ki}$ . L'inégalité de Noether Fano devient

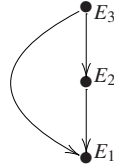
$$\sum p_i \mu_i > d \sum p_i \alpha_i.$$

*Exemple 48.* Supposons que l'on extrait  $E = E_3$  en trois éclatements :

1. Eclatement d'un point de multiplicité  $\mu_1$ , produisant  $E_1$  avec  $m_1 = \mu_1$  et  $a_1 = 2$  ;

2. Eclatement d'une courbe de multiplicité  $\mu_2$  sur  $E_1$ , produisant  $E_2$  avec  $m_2 = \mu_1 + \mu_2$  et  $a_2 = 2 + 1$  ;
3. Eclatement de la courbe  $E_1 \cap E_2$  de multiplicité  $\mu_3$ , produisant  $E_3$  avec  $m_3 = 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$  et  $a_3 = 3 + 2 + 1$ .

Le graphe est :



Dans cet exemple on a  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 1$ ,  $p_3 = 1$ , et on vérifie que

$$m_3 = \sum p_i \mu_i, \quad a_3 = \sum p_i \alpha_i$$

où  $\alpha_i = 1$  ou  $2$  est la codimension du centre moins 1.

## 6.5 Intersection de cycles

Référence pour cette section : [Har77, Appendix A]

Un cycle de codimension  $r$  dans une variété  $X$  est une somme formelle finie  $\sum a_i V_i$  où les  $A_i \in \mathbb{Z}$  et les  $V_i$  sont des sous-variétés irréductibles de  $X$  de codimension  $r$ .

On note  $A^r$  le groupe des cycles de codimension  $r$  modulo équivalence rationnelle : l'équivalence rationnelle entre  $k$ -cycles est engendré par l'équivalence linéaire en restriction aux (normalisées des) variétés de dimension  $k + 1$  dans  $X$  (pour les diviseurs, i.e. en codimension 1, cela coïncide avec l'équivalence linéaire).

On note  $A(X)$  le groupe gradué  $\bigoplus_{r=0}^{\dim X} A^r(X)$ .

Il existe une forme d'intersection

$$A^r(X) \times A^s(X) \rightarrow A^{r+s}(X)$$

satisfaisant les axiomes :

1.  $A(X)$  devient un anneau (en particulier la forme d'intersection est commutative est associative), appelé l'anneau de Chow de  $X$  ;
2. L'intersection est compatible avec les pull-back par un morphisme ;
3. Formule de projection : Si  $f: X \rightarrow Y$  est un morphisme, et  $x \in A(X)$  et  $y \in A(Y)$ , alors  $f_*(x \cdot f^*y) = f_*(x) \cdot y$ . (si le morphisme  $f$  est birationnel,  $f_*(V)$  est le cycle associé à  $f(V)$ , en général il faut multiplier par le degré de  $f|_V$  ;
4. Localité : Si  $Y$  et  $Z$  sont des sous-variétés de  $X$  intersectant proprement (i.e. les composantes irréductibles  $W_j$  de  $Y \cap Z$  ont codimension  $\text{codim} Y + \text{codim} Z$ ), alors

$$Y \cdot Z = \sum i(Y, Z; W) W_j$$

où  $i(Y, Z; W) \in \mathbb{N}$  ne dépend que du voisinage d'un point générique de  $W_j$  dans  $X$  ;

5. Normalisation : Si  $Y$  est une sous-variété et  $Z$  un diviseur Cartier rencontrant  $Y$  proprement, alors  $Y \cdot Z$  est le cycle correspondant au diviseur de Cartier  $Y \cap Z$  sur  $Y$ .

*Exemple 49.* Dans la preuve du lemme 44, on avait besoin de  $H \cdot \Sigma \cdot V = 4d \deg(C)$ . Si  $L$  est la classe d'une section hyperplane, on a  $H \sim dL$ ,  $V \sim 4L$ , il s'agit donc de montrer que  $\Sigma \cdot L \cdot L = \deg(C)$ . Si on choisit comme représentant de  $L$  un hyperplan général passant par le sommet  $y$  du cône  $\Sigma$ , on a  $L \cdot C$  égal à  $\deg(C)$  points distincts, et donc  $\Sigma \cdot L$  équivaut à  $\deg(C)$  droites, d'où le résultat en intersectant une fois de plus par un hyperplan.

Si  $C$  est une courbe et  $x \in C$  un point, on définit la multiplicité de  $C$  en  $x$  comme le minimum des intersections locales  $i(C, H; x)$  où  $H$  est une section hyperplane passant par  $x$  (ce minimum est atteint pour  $H$  générique). Si  $H'$  est un hyperplan générique passant près de  $x$ , alors  $i(C, H; x)$  correspond au nombre de points d'intersection (tous transverse par généralité) de  $H'$  et  $C$  dans un petit voisinage de  $x$ . La multiplicité de  $C$  en  $x$  est aussi égale à la multiplicité du cône tangent à  $C$  en  $x$ .

**Lemme 50.** Soit  $X$  une variété projective de dimension 3,  $x \in X$  un point lisse, et  $Y \rightarrow X$  l'éclatement de  $x$  avec diviseur exceptionnel  $E$ . Soit  $F, G$  deux diviseurs sur  $X$ . On définit un 1-cycle  $Z$  sur  $E$  par

$$\overline{F} \cdot \overline{G} = \overline{F \cdot G} + Z,$$

où les barres dénotent des transformées strictes. Alors

$$\text{mult}_x(F \cdot G) = (\text{mult}_x F)(\text{mult}_x G) + \deg Z.$$

*Preuve.* Soit  $S$  une section hyperplane générale par  $x$ . Notons  $\nu_F, \nu_G$  les multiplicités respectives de  $F$  et  $G$  en  $x$ . Sur un voisinage ouvert de  $x$  on a

$$\begin{aligned} \text{mult}_x(F \cdot G) &= F \cdot G \cdot S = \pi^* F \cdot \pi^* G \cdot \pi^* S \\ &= (\overline{F} + \nu_F E) \cdot (\overline{G} + \nu_G E) \cdot \overline{S} \\ &= \overline{F} \cdot \overline{G} \cdot \overline{S} + \nu_F \nu_G E^2 \cdot \overline{S} + \nu_F E \cdot \overline{G} \cdot \overline{S} + \nu_G E \cdot \overline{F} \cdot \overline{S} \\ &= \deg Z - \nu_F \nu_G + \nu_F \nu_G + \nu_F \nu_G. \end{aligned}$$

NB :  $E^2 S = E|_S \cdot E|_S$  dans  $S$ , donc  $= -1$ .

$E \cdot \overline{G}$  est une courbe de degré  $\nu_G$  dans  $E = \mathbb{P}^2$ . □

## 6.6 Définition des $c_i$

Soient  $H_1, H_2$  deux membres généraux de  $|H|$ . On définit une suite de 1-cycles :

$$\begin{aligned} H_1 \cdot H_2 &= Z_0 \\ H_1^1 \cdot H_2^1 &= Z_0^1 + Z_1 \\ &\vdots \\ H_1^i \cdot H_2^i &= (\dots)^i + Z_i \\ &\vdots \end{aligned}$$

où un exposant  $i$  dénote un transformé strict sur le  $i$ ème éclatement  $X_i$ , et  $Z_i \subset E_i$ .

Posons  $c_{i,j} = \text{mult}_{x_{j-1}} Z_i^{j-1}$ , et notons simplement  $c_i$  pour  $c_{0,i}$ . On note  $d_i$  le degré de  $Z_i$  dans le diviseur exceptionnel  $E_i \simeq \mathbb{P}^2$  : si  $Z_i = \sum a_k C_k$ ,  $\deg Z_i = \sum a_k \deg(C_k)$ .

Remarquons que

**Lemme 51.**  $c_1 \leq 4d^2$

*Preuve.* Le nombre  $c_1$  est la multiplicité du cycle  $Z_0 = H_1 \cdot H_2$  en  $x$ . Considérons  $S$  une section hyperplane générale par  $x$ , on a

$$c_1 = \text{mult}_x(H_1 \cdot H_2) \leq H_1 \cdot H_2 \cdot S = 4d^2.$$

□

## 6.7 La clé

**Proposition 52** ([Puk07, Proposition 2.11]).

$$\sum_{i=1}^L p_i c_i \geq \sum_{i=1}^L p_i \mu_i^2 + p_L \sum_{i=L+1}^K \mu_i^2.$$

*Preuve.* En appliquant à chacun des  $L$  éclatements de points le lemme 50 on obtient un système d'équations

$$\begin{aligned} \mu_1^2 + d_1 &= c_1 \\ \mu_2^2 + d_2 &= c_2 + c_{1,2} \\ &\vdots \\ \mu_i^2 + d_i &= c_i + c_{1,i} + \cdots + c_{i-1,i} \\ &\vdots \\ \mu_L^2 + d_L &= c_L + c_{1,L} + \cdots + c_{L-1,L} \end{aligned}$$

On multiplie chaque ligne du système par  $p_i$  et on les additionne pour obtenir

$$\sum_{i=1}^L p_i c_i + \sum_{1 \leq i < j \leq L} p_j c_{i,j} = \sum_{i=1}^L p_i \mu_i^2 + \sum_{i=1}^{L-1} p_i d_i + p_L d_L.$$

Noter que  $d_L \geq \sum_{i=L+1}^K \mu_i^2$  (couper par une section hyperplane). La proposition sera prouvée si l'on peut vérifier que pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq L-1$ ,

$$\sum_{i < j \leq L} p_j c_{i,j} \leq p_i d_i \tag{2}$$

Remarquons que (la multiplicité n'augmente pas après éclatement, et la multiplicité initiale de  $Z_i$  est inférieure au degré de  $Z_i$ )

$$c_{i,L} \leq c_{i,L-1} \leq \cdots \leq c_{i,i+1} \leq d_i$$

et  $c_{i,j} > 0 \implies j \rightarrow i$ . Ainsi

$$\sum_{i < j \leq L} p_j c_{i,j} \leq \sum_{j \rightarrow i} p_j c_{i,j} \leq d_i \sum_{j \rightarrow i} p_j = p_i d_i.$$

□



## 6.8 L'inégalité $4d^2$

La proposition 52 entraine en particulier ([Puk07, Cor. 2.3])

$$c_1 \sum_{i=1}^L p_i \geq \sum_{i=1}^K p_i \mu_i^2. \quad (3)$$

En effet les multiplicités  $c_i$  décroissent avec  $i$ , et  $i \geq L$  implique  $p_L \geq p_i$ .

On applique maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\sum a_i \sum b_i \geq \left( \sum (a_i b_i)^{1/2} \right)^2$$

avec  $a_i = p_i$  et  $b_i = p_i \mu_i^2$ . On obtient

$$\sum_{i=1}^K p_i \sum_{i=1}^K p_i \mu_i^2 \geq \left( \sum_{i=1}^K p_i \mu_i \right)^2$$

Rappelons que  $m = \sum_{i=1}^K p_i \mu_i$ , et  $m > d \sum_{i=1}^K p_i \alpha_i$  (Noether Fano), donc

$$c_1 \sum_{i=1}^L p_i \sum_{i=1}^K p_i > d^2 \left( \sum_{i=1}^K p_i \alpha_i \right)^2.$$

En se rappelant que  $\alpha_1 = \dots = \alpha_L = 2$ , et  $\alpha_{L+1} = \dots = \alpha_K = 1$ , on obtient

$$c_1 > d^2 \frac{(\sum_{i=1}^L 2p_i + \sum_{i=L+1}^K p_i)^2}{\sum_{i=1}^L p_i \sum_{i=1}^K p_i}. \quad (4)$$

On peut réécrire le carré au numérateur comme suit :

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^L 2p_i + \sum_{i=L+1}^K p_i \right)^2 &= 4 \left( \sum_{i=1}^L p_i \right)^2 + 4 \sum_{i=1}^L p_i \sum_{i=L+1}^K p_i + \left( \sum_{i=L+1}^K p_i \right)^2 \\ &= 4 \sum_{i=1}^L p_i \sum_{i=1}^K p_i + \left( \sum_{i=L+1}^K p_i \right)^2 \end{aligned}$$

et finalement  $c_1 > 4d^2$ , ce qui vient contredire le lemme 51 et finit la preuve du théorème.