Quando uma coisa é igual a alguma outra coisa?

Relativizando a noção de igualdade

Guilherme & Pablo

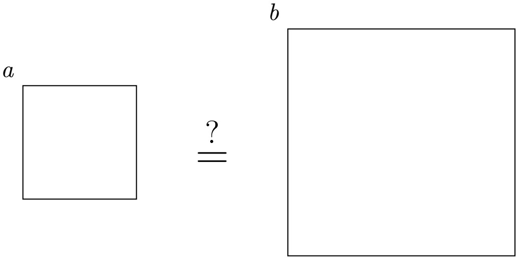
Abril de 2021

Disclaimer

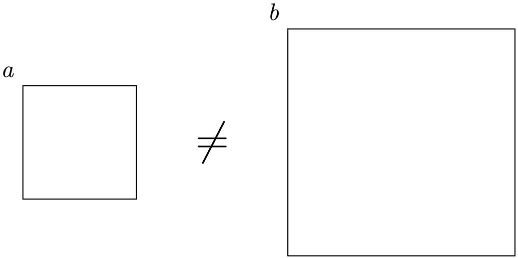
¯_(ツ)_/¯

- Vamos balançar os braços sim!
- Esse é um seminário sobre *Filosofia da Matemática* e não sobre *Matemática*
- Nem todos os seminários são assim
- Vamos usar algumas áreas de exemplo, mas as ideias do seminário são mais gerais
- Em particular vamos usar exemplos mais geométricos
- É tudo bem se você não entender alguma parte
- Se tiver dúvida, pergunte!

Quando $a = b$?

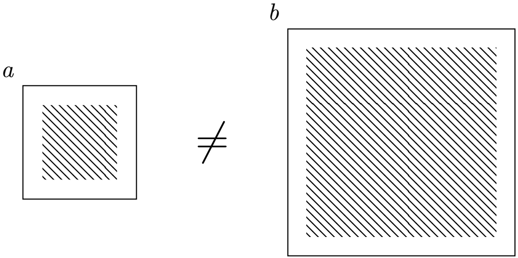


Quando $a = b$?

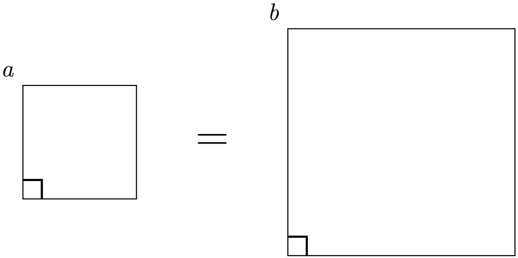


- Parece uma questão simples
- Eu ganho *alguma coisa* além de *trabalho* diferenciando esse objetos?
- Diferenciar objetos pode realmente ser um *fardo*

Quanto Vale a Pena Diferenciar?

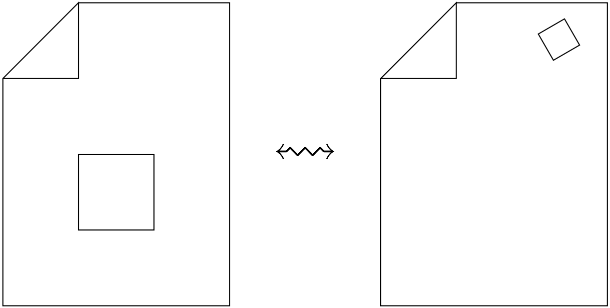


Quanto Vale a Pena Diferenciar?



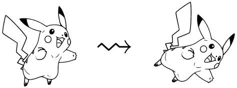
Quanto Vale a Pena Diferenciar?

- No rascunho da FUVEST tanto faz o tamanho do quadrado



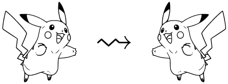
Desenhos no Papel

- Rotações



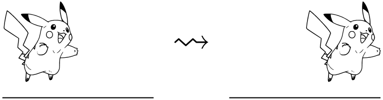
$$f(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, \ldots)$$

- Reflexões



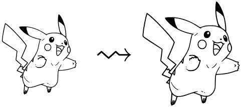
$$f(x,y) = (\pm x, \pm y)$$

- Translações



$$f(x,y) = (x+\lambda, y+\mu)$$

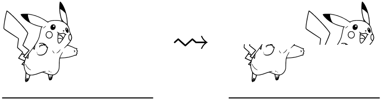
- Homotetias



$$f(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$$

Transformação que Não Estraga o Objeto

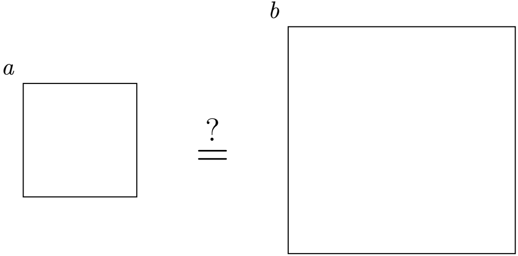
- Transformação que *não estraga o objeto*
  - Preserva as propriedades que eu to interessado
- Dizemos que $a = b$ se existe $f : a \longrightarrow b$
- Igualdades como funções
- Ser bijeção é necessário, mas não é suficiente



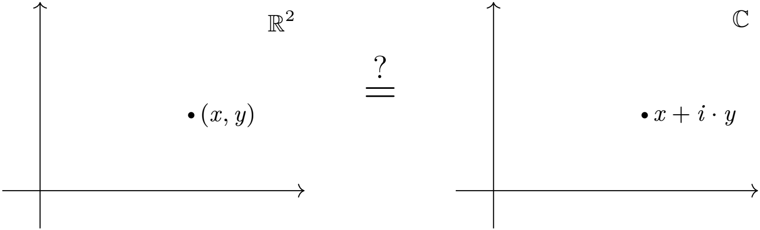
- Qual a palavra mágica? *Isomorfismo*!
  - Mesma forma
  - Equivalente
- Aparece em *Álgebra Linear* e em muitas outras áreas que vocês vão encontrar ao longo da graduação!

Voltando aos Exemplos...

- Quadrado Grande e Quadrado Pequeno: forma **vs** área

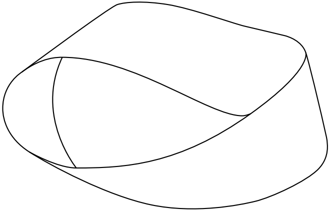


- Plano Euclidiano e Plano Complexo: vetor **vs** número



Topologia

- Agora vamos focar em um exemplo mais específico e sofisticado
- A área da *Topologia* estuda *espaços* com noções de *proximidade* ou *adjacência*

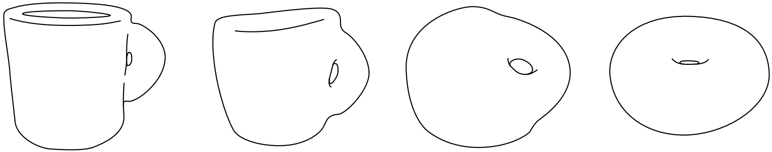


- Esse não é um seminário sobre Topologia

Deformações Contínuas

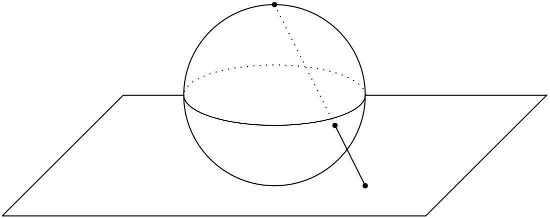
- Amassar massinha preserva a noção de *adjacência*
  - Não pode rasgar a massinha
  - Não pode fechar o buraco
- Nosso objeto é a superfície da massinha + a noção de adjacência

A Caneca e o Donut



- Existe uma deformação contínua da caneca no donut
- A caneca e o donut são iguais aos olhos da Topologia
- Mas o que isso tem a ver com função?
- Transformação que preserva a adjacência

A Projeção Estereográfica



$$f(x, y, z) = \left(\frac{x}{\frac{1}{2} - z}, \frac{y}{\frac{1}{2} - z} \right)$$

- A f acima preserva a noção de adjacência (é contínua)

Mapas Mundi

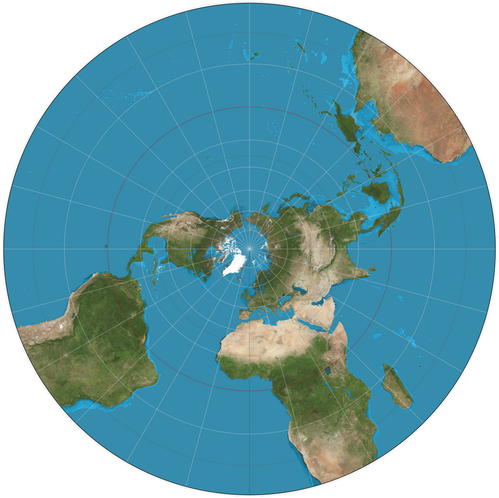


Figure: A Projeção Estereográfica da Terra

Mapas Mundi

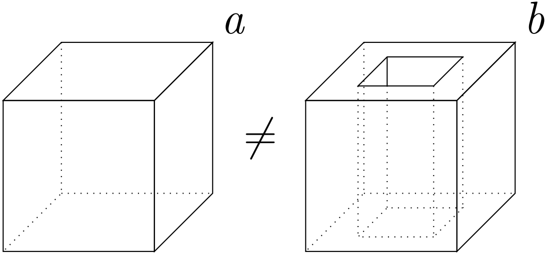
Figure: A Projeção Equidistante na Bandeira da ONU

Mapas Mundi

- As projeções são iguais aos olhos da Topologia mas diferentes aos olhos da Geometria
- Diferentes projeções preservam coisas diferentes
  - Projeção Estereográfica preserva ângulos
  - Bandeira da ONU preserva distâncias
- Coisas podem ser iguais em contexto e diferentes em outro

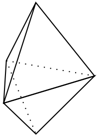
Pausa

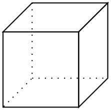
Quando $a \neq b$



Quando $a \neq b$

- $\chi = \#\text{vértices} - \#\text{arestas} + \#\text{faces}$

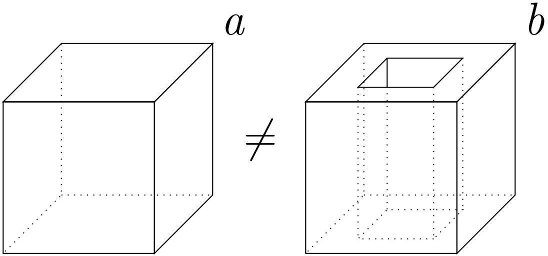




- Se o poliedro é convexo então $\chi = 2$
- Se $a = b$ então $\chi_a = \chi_b$!
- Se $\chi_a \neq \chi_b$ então $a \neq b$!

Quando $a \neq b$

- $\chi_a = \ \ 8 - 12 + \ \ 6 = 2$
- $\chi_b = 16 - 32 + 16 = 0$
- $\chi_a \neq \chi_b$!



Quando $a \neq b$

- Para provar que $a = b$ basta achar $f : a \longrightarrow b$

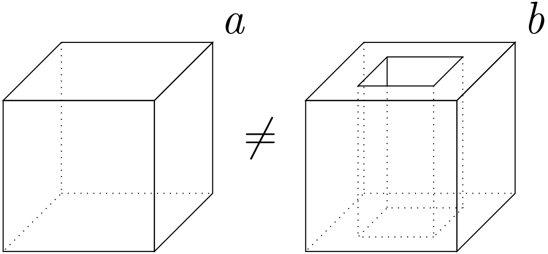
$$\exists f : a \longrightarrow b \text{ que preserva}$$

- Para provar que $a \neq b$ preciso mostrar que

$$\nexists f : a \longrightarrow b \text{ que preserva}$$
$$\forall f : a \longrightarrow b,\ f \text{ não preserva}$$

- Verificar que duas coisas são *diferentes* é muito mais difícil que verificar que duas coisas são *iguais*!
- Invariantes
  - Quero mostrar que $a \neq b$
  - Encontro alguma coisa que é *preservada* pela minha noção de igualdade
  - Verifico que essa coisa muda de a para b
  - Então $a \neq b$

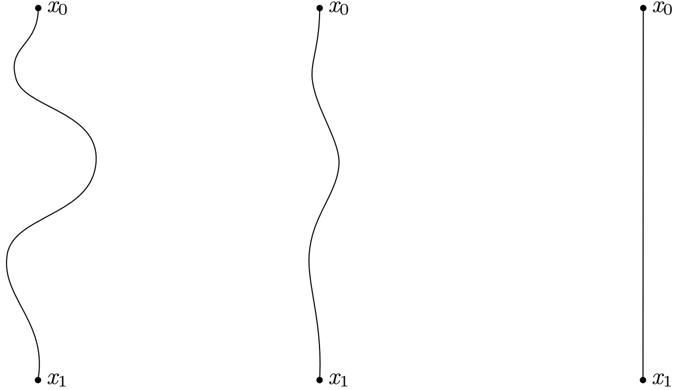
Quando $a \neq b$



- $\chi_a \neq \chi_b$ justamente por que

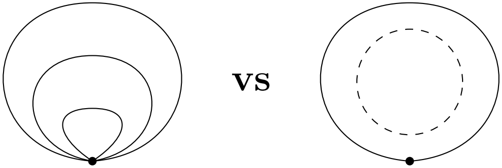
$$\#\text{buracos de } a \neq \#\text{buracos de } b$$

A Ideia por Trás do Buraco (Homotopia)

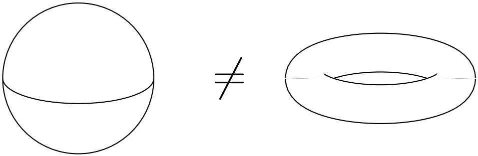


A Ideia por Trás do Buraco (Homotopia)

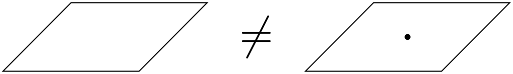
- *buraco* $\implies$ *loop que não contrai*



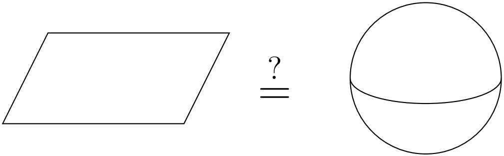
- *esfera* $\neq$ *donut*!



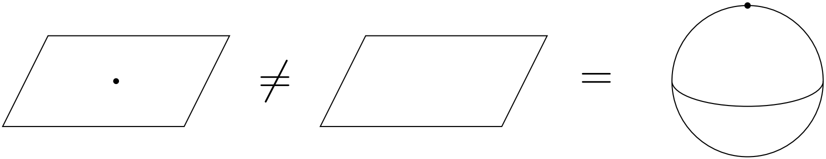
- *plano* $\neq$ *plano sem um ponto*!



A Terra é Plana?

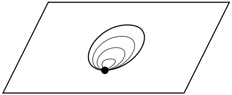


- Suponhamos que sim

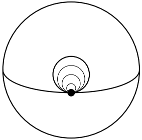


Nem Tudo é Perfeito na Vida...

- No plano todo loop pode ser contraido a um ponto



- Na esfera todo loop pode ser contraido a um ponto



- Mas o plano e a esfera não são iguais para a Topologia!
- Nem todo invariante é perfeito...
  - Invariantes não nos permitem saber se $a = b$
  - Invariantes nos permitem *talvez* saber se $a \neq b$
- Tensão constante

Nem Tudo é Perfeito na Vida...

ser fácil de calcular

vs

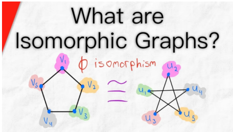
diferenciar as coisas bem o suficiente

Fim

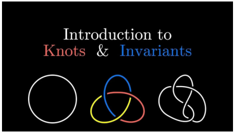
And they lived happily ever after

Pra que quiser saber mais...

- What are Isomorphic Graphs? | Graph Isomorphism, Graph Theory



- Introduction to Knots & Invariants



- Algebraic topology: Fundamental group

Algebraic topology

Fundamental
group