Representações de Grupos Compactos

O quê? Por quê? Como?

Pablo

Julho de 2021

Conteúdos

Disclaimer

¯_(ツ)_/¯

- Olá, meu nome é ~~Thiago~~ Pablo!
- Iryna Kashuba
- Tudo isso está nas minhas notas
- Por favor me interrompa!
- Grupos

Citação

Até ~~a criança~~ *um grupo* se dará a conhecer pelas suas ações, ...

— Provérbios 20, Versículo 11

Citação

Um grupo *é um grupoide com um único elemento*.

— Paolo Aluffi, Algebra: Chapter 0 [1]

Definição

Dado um conjunto X, uma ação de G em X é um homomorfismo de grupos

$$\rho : G \longrightarrow S_X$$

Definição

Dado um conjunto X, uma ação de G em X é um homomorfismo de grupos

$$\rho : G \longrightarrow \mathsf{Aut}(X) \text{ (em } \mathsf{Set}\text{)}$$

Definição

Dados um grupo G, uma representação de G é um espaço vetorial V munido de um homomorfismo de grupos

$$\rho : G \longrightarrow \mathsf{GL}(V)$$

Definição

Dados um grupo G, uma representação de G é um espaço vetorial V munido de um homomorfismo de grupos

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V) \text{ (em } \mathbb{C}\text{-}\mathbf{Vect})$$

- $W \subseteq V$ é subrepresentação se $GW \subseteq W$
- V é irredutível se as únicas subrepresentações de V são 0 e V
- Se V e W são G-representações e $T : V \longrightarrow W$ é tal que

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "g"'] & W \arrow[d, "g"] \\ V \arrow[r, "T"'] & W \end{tikzcd}$$

então T é dito um homomorfismo de representações

Ações de Grupos (em $\mathbb{C}$-Vect)

- Entender as representações de um grupo nos ajuda a entender o grupo

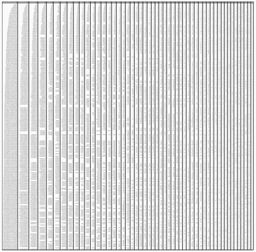
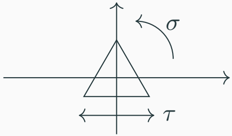


Figure: A Tabela de Caracteres do Grupo Monstro

- Para extrair informação do grupo temos que entender (quase) todas as suas representações!
- Classificar todas as representações de dimensão finita de G a menos de isomorfismo
- Por onde começar? Grupos finitos!

Representações de Grupos Finitos

- Exemplos
    - $\mathbb{C}^n$ é uma S_n-representação com $e_i \xmapsto{\sigma} e_{\sigma(i)}$
    - O plano complexo com



      é uma D_3-representação
    - O espaço $\mathbb{C}[G]$ das funções $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ com

$$(g \cdot f)(h) = f(g^{-1}h)$$

      é dito a representação regular de G
    - $V \oplus W$, $V \otimes W$ e V^* são G-representações
- Mas por que grupo finitos? Por que eles são finitos!
- Em particular, para G finito existe a média

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g)$$

Teorema (de Maschke)
Se G é finito, V é G-representação com $\dim V < \infty$ e W é subrepresentação de V então existe uma subrepresentação U de V tal que

$$V \cong W \oplus U$$

- Redutibilidade completa
- Tome um produto interno $H : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ e considere

$$\langle v, u \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} H(gv, gu)$$

- $\langle \, , \rangle$ é G-invariante

$$\langle gv, gu \rangle = \langle v, u \rangle$$

- $U = W^{\perp}$ é subrepresentação de V
- $V \cong W \oplus U$ $\blacksquare$

- Toda G-representação de dimensão finita é soma direta de representações irredutíveis

Lema (Schur)

Se V e W são G-representações irredutíveis e $T : V \longrightarrow W$ é homomorfismo de representações então

(i) *$T = 0$ ou T é isomorfismo*

(ii) *$T = \lambda \, \mathrm{Id}$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$*

- Toda G-representação irredutível de dimensão finita é subrepresentação de $\mathbb{C}[G]$
- Para G finito, classificar as representações irredutíveis é suficiente para classificar todas as de dimensão finita!
- E se G não for finito???

Grupos Topológicos

- Grupos infinitos são complicados
- Solução? Geometria!
- Grupos Topológicos = Grupos + Topologia
- $\mathsf{GrpTop} = \mathsf{Grp}(\mathsf{Top})$

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{GrpTop} \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Grp} \arrow[d] \\
\mathsf{Top} \arrow[r] & \mathsf{Set}
\end{tikzcd}$$

- Podemos usar ferramentas da topologia!
- Exemplos
  - Grupos discretos
  - $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$
  - $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$
  - $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ e $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$
  - $\mathrm{U}(n)$
  - Grupos de Lie
  - Grupos profinitos

- Não faz sentido esquecermos a topologia quando falamos de representações de grupos topológicos

Definição

Uma representação V de G é dita *contínua* se

(i) V é um *espaço vetorial topológico*

(ii) A aplicação

$$(g, v) \longmapsto gv$$

é contínua

- Representações contínuas de G
- Subrepresentações fechadas de G
- Homomorfismos de representações contínuos

Representações Contínuas

- Tudo isso faz sentido do ponto de vista *categórico*

$$\mathsf{Rep}(G) = \begin{cases} \text{objetos} = \{\text{representações contínuas}\} \\ \text{morfismos} = \{\text{homomorfismos contínuos}\} \end{cases}$$

- E daí?
- Todo grupo compacto (Hausdorff) G admite uma *medida de Borel G-invariante, não-trivial, regular e finita*
- Todo grupo é Hausdoff e compacto
- Única a menos de escalares
- *Medida de Haar*

$$\begin{aligned} G \text{ discreto} &\quad\rightsquigarrow\quad \text{Medida de contagem} \\ \mathbb{R}^n &\quad\rightsquigarrow\quad \text{Medida de Lebesgue} \\ \mathbb{S}^1 &\quad\rightsquigarrow\quad \text{Medida angular} \\ \mathsf{GL}_n(\mathbb{R}) &\quad\rightsquigarrow\quad \lambda/_{\mathsf{det}} \end{aligned}$$

- E daí?

- Se temos uma medida, sabemos integrar
- Podemos reproduzir os argumentos de média em grupos compactos!

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g) \rightsquigarrow \frac{1}{\mu(G)}\int_G f(g)\,\mathrm{d}g$$

- *Generalização estrita*

Teorema (Maschke)
Se G é ~~finito~~ compacto, V é G-representação com $\dim V < \infty$ e W é subrepresentação de V então existe uma subrepresentação U de V tal que

$$V \cong W \oplus U$$

- Tome um produto interno $H : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ e considere

$$\langle v, u\rangle = \frac{1}{\mu(G)}\int_G H(gv, gu)\,\mathrm{d}g$$

- ...

■

- Quase não usamos a finitude de $\dim V$

Definição

Uma representação V de um grupo topológico G é dita *unitária* se V é espaço de Hilbert e

$$\langle gv, gu \rangle = \langle v, u \rangle$$

para todo $g \in G$.

Teorema (Maschke)

Se G é compacto, V é G-representação unitária e $W \subseteq V$ é subrepresentação de V então existe uma subrepresentação U de V tal que

$$V \cong W \oplus U$$

Representações Unitárias

- O espaço $L^2(G)$ com
$$(g \cdot f)(h) = f(g^{-1}h) \tag{1}$$
$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_G f_1(g)\overline{f_2(g)}\,\mathrm{d}g \tag{2}$$
é uma G-representação unitária!
    - Para G finito e discreto $L^2(G) = \mathbb{C}[G]$
    - *Representação regular*
- Podemos usar ferramentas da análise funcional!
- Toda G-representação unitária V admite uma subrepresentação $W \subseteq V$ não nula com $\dim W < \infty$
$$\begin{aligned} Q : V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto \int_G \langle v, gu \rangle gu \,\mathrm{d}g \end{aligned}$$
    - Q é homomorfismo compacto e semi-positivo
    - Q admite um autovalor $\lambda > 0$
    - Pelo teorema espectral $\dim V_\lambda < \infty$ ∎

- Toda representação unitária e irredutível tem dimensão finita
- Toda representação irredutível V é unitária

$$\begin{aligned} \Phi : V &\longrightarrow L^2(G) \\ v &\longmapsto \Phi(v) \; : \begin{aligned}[t] G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ g &\longmapsto f(gv) \end{aligned} \end{aligned}$$

- Para entender as representações de dimensão finita basta entender as irredutíveis
- Por onde começar? Buscando invariantes!

Definição

Se V é G-representação com $\dim V < \infty$, seja

$$\begin{aligned} \chi_V : G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ g &\longmapsto \mathrm{Tr}(g \restriction_V) \end{aligned}$$

- Se $T : V \longrightarrow W$ é isomorfismo então

$$\chi_W(g) = \mathrm{Tr}(g \restriction_W) = \mathrm{Tr}(T\ (g \restriction_V) T^{-1}) = \mathrm{Tr}(g \restriction_V) = \chi_V(g)$$

- $\chi_V(g) = \chi_V(hgh^{-1})$
- *Funções de classe*
- $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$ e $\chi_{V \otimes W} = \chi_V \cdot \chi_W$
- Os caracteres irredutíveis são ortogonais em $L^2(G)$!

$$\frac{1}{\mu(G)} \int_G \chi_V(g) \overline{\chi_W(g)}\, \mathrm{d}g = \begin{cases} 1 & \text{se } V \cong W \\ 0 & \text{se } V \ncong W \end{cases}$$

  - Os caracteres irredutíveis são linearmente independentes
  - Uma representação de dimensão finita é unicamente determinada pelo seu caráter
  - Caracteres são um invariante perfeito
- Uma representação V é irredutível se, e somente se $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$

Teorema (Peter-Weyl)

$$L^2(G) \cong \widehat{\bigoplus_{V \in \widehat{G}}} \dim V \cdot V$$

$$\mathcal{C}(G) = \widehat{\bigoplus_{V \in \widehat{G}}} \mathbb{C}\chi_V$$

- Generaliza resultados clássicos de grupos finitos
- *Origens da teoria de representações*
- Encontrar os caracteres irredutíveis é suficiente para descrever $\mathrm{rep}(G)$
- Como?

Teoria de Caracteres

- Se G é abeliano, então toda função $G \longrightarrow \mathbb{C}$ é *função de classe*
- Se G é abeliano então todo $g \in G$ é homomorfismo de representações

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & V \arrow[d, "h"] \\ V \arrow[r, "g"'] & V \end{tikzcd}$$

- Toda G-representação irredutível é unidimensional
- $\chi_V(g) = \rho(g) \in \mathbb{S}^1$
- $\chi_V : G \longrightarrow \mathbb{S}^1$ é contínua
- Se $f : G \longrightarrow \mathbb{S}^1$ é contínua então $\mathbb{C}$ com $\rho(g) = f(g)\,\mathsf{Id}$ é representação
- Os caracteres irredutíveis são precisamente as funções contínuas $G \longrightarrow \mathbb{S}^1$
- O dual $\widehat{G} = \mathsf{Hom}(G, \mathbb{S}^1)$
- Produto natural $\chi_V \cdot \chi_W = \chi_{V \otimes W}$

A Dualidade de Pontryagin

- $\widehat{G}$ com a topologia compacto-aberto é discreto
- $\widehat{\widehat{G}}$ com a topologia compacto-aberto é compacto

Teorema (Pontryagin)
Para G compacto e abeliano a aplicação avaliação

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow \widehat{\widehat{G}} \\ g &\longmapsto \varphi(g) : \begin{aligned}[t] \widehat{G} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ \chi &\longmapsto \chi(g) \end{aligned} \end{aligned}$$

é um isomorfismo de grupos topológicos

- Recuperamos toda a estrutura de G a partir de $\mathrm{rep}(G)$
- Vale mais geralmente para grupos abelianos localmente compactos
- Normalmente é apresentado no contexto de análise harmônica
- E se G não for abeliano???

A Dualidade de Pontryagin

- $\widehat{G}$ é sempre abeliano
- Não temos nenhuma chance de obter $G \cong \widehat{\widehat{G}}$

Teorema (Tannaka-Krein)
Um grupo compacto G é unicamente determinado por $\mathrm{rep}(G)$ *e por sua estrutura monoidal simétrica.*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{rep}(G) \arrow[d, "\omega"] \\ \mathbb{C}\text{-}\mathbf{Vect} \end{tikzcd}$$

- Recupero não só a estrutura de grupo de G, mas também a topologia
- Análogos para outros *sabores* de grupos

Referências

Notes on Representation Theory

[1] Paolo Aluffi. *Algebra: Chapter 0*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2009.

[2] Vera Serganova Caroline Gruson. *A Journey Through Representation Theory: From Finite Groups to Quivers via Algebras*. 2018.

[3] Robert J. Valenza Dinakar Ramakrishnan. *Fourier Analysis on Number Fields*. 1st ed. Graduate Texts in Mathematics v. 186. Springer, 1998.

[4] Pavel Etingof. *Introduction to Representation Theory*. Student Mathematical Library. American Mathematical Society, 2011.

[5] Joe Harris William Fulton. *Representation theory. A first course*. Corrected. Graduate Texts in Mathematics / Readings in Mathematics. Springer, 1991.