



Courbes en tous genres sur les variétés algébriques

Thomas Dedieu

Mémoire présenté publiquement le mardi 30 novembre 2021
devant le jury composé de

Arnaud Beauville (rapporteur)
Gavril Farkas (rapporteur)
Stéphane Lamy
Laurent Manivel (parrain)
Rita Pardini (rapporteur)
Claire Voisin

en vue de l'obtention de
l'Habilitation à Diriger des Recherches

Courbes en tous genres sur les variétés algébriques

Thomas Dedieu

Mémoire présenté en vue de l'obtention de
l'habilitation à diriger des recherches

Table des matières

Remerciements	2
Introduction	3
1 Variétés de Severi	5
1.1 Variétés de Severi universelles des surfaces $K3$	6
1.2 Densité des courbes nodales dans les familles équi-génériques	10
1.3 Irréductibilité pour les variétés de Severi des surfaces $K3$	15
1.4 Applications de la positivité des fibrés en droites	17
1.5 Variétés de Severi des surfaces d'Enriques	19
2 Courbes rationnelles et classification	22
3 Modules des courbes et surfaces polarisées	29
3.1 Courbes canoniques, surfaces $K3$, et leurs extensions	30
3.2 Applications des modules pour les courbes sur les surfaces d'Enriques	43
3.3 Quelques lieux remarquables dans les espaces de modules de courbes	53
4 Géométrie énumérative	60
4.1 Limites de variétés de Severi	61
4.2 Théorie de l'élimination	70
5 Et ensuite ?	76
5.1 Principe de bidualité et singularités	76
5.2 Surfaces faiblement défectives et variétés de Severi	79
5.3 Quelques problèmes liés à l'extensibilité	82
5.4 Énumération de courbes sur les surfaces $K3$	83
5.5 Formules à la Salmon dans d'autres espaces	94
Liste des travaux	96
Bibliographie	99

Remerciements

J'ai le grand bonheur d'avoir un jury constitué de mathématiciens dont j'admire et apprécie tout particulièrement les travaux (je l'écris avec la plus grande sincérité!). En plus d'un honneur, c'est un grand plaisir pour moi de les voir rassemblés pour que je leur présente mon travail. Qu'ils soient ici tous remerciés d'avoir accepté de participer à ce jury.

Pour qui a déjà lu ce mémoire, il est difficile d'ignorer l'importance des contributions d'Arnaud Beauville dans à peu près tous les domaines auxquels j'ai pu toucher, je suis donc très heureux qu'il l'ait rapporté. Gavril Farkas et Rita Pardini ont chacun écrit des articles auxquels je suis particulièrement attaché, qui n'apparaissent d'ailleurs pas tous dans la bibliographie, et leur avis sur mon travail m'est précieux. Tous les deux ont accepté de lire ce texte en français, quand bien même ce n'est pas une langue qu'ils pratiquent couramment, et je les remercie de cet effort. Köszönöm szépen Gabi hogy elolvastad a dolgozatomat. Nagyon örvendek hogy megismerhettem a véleményed.¹ Grazie Rita della tua lettura e dei tuoi commenti. Spero che il francese imparato a scuola ti sia stato più che utile, piacevole.

Claire Voisin a mené à bien la délicate tâche de me lancer dans l'océan de la géométrie algébrique complexe. J'espère modestement qu'elle est satisfaite du résultat³, et la remercie chaleureusement pour tout ce qu'elle m'a appris.

J'ai la chance d'avoir Stéphane Lamy et Laurent Manivel comme collègues à Toulouse. Nos échanges réguliers sont pour moi un grand enrichissement. C'est un plaisir de travailler avec vous.

J'adresse aussi un grand merci à tous mes collaborateurs. Contrairement à une idée préconçue qui pourrait avoir cours, la pratique des mathématiques est difficilement solitaire. La recherche est un exercice éprouvant, et il est certes réconfortant de partir à l'aventure avec des compagnons, qui deviennent rapidement des amis. Certains sont d'ailleurs parmi mes amis les plus chers, ils se reconnaîtront sans doute. Lors des rares moments de grâce où l'on est envahi par l'euphorie aussi intense que fugace d'avoir vaincu une difficulté (« εὐρηκα! »), il est certes plaisant d'avoir quelqu'un avec qui profiter de la vue. Mais ce qui fait le caractère fondamentalement social des mathématiques, c'est la nécessité de discuter. La mathématique est une construction humaine collective, qui se fait par échange, confrontation, et digestion d'idées.

Je remercie également avec plaisir tous les enseignants, collègues et étudiants avec qui j'ai pu échanger au fil des années.

Merci à tous pour toutes les maths que vous m'avez transmises, par tradition orale, par vos écrits, par votre exemple, ou tout simplement par vos questions.

Merci enfin à ma famille, qui doit bien accepter de me partager avec les maths. Voilà, c'est ça que j'essaie de faire de ma vie.

Mes chers enfants, je vous souhaite de trouver ce qui vous permettra d'affirmer à votre tour que votre vie vaut la peine d'être vécue. Soyez curieux et souvenez vous qu'un jour où l'on n'apprend rien est un jour perdu. Entourez-vous d'amis pour pratiquer votre art et surtout, rigolez.

À Auch, le vendredi 12 novembre 2021.

1. Mulțumesc Ana-Maria pentru traducerea făcută.²

2. ...et merci Valina pour le second cycle de traduction.

3. je prends le risque de l'écrire même si elle a cité l'insatisfaction parmi les qualités indispensables pour faire des mathématiques, en réponse à une question qu'on lui a posée en entrevue.

Lorsque j'étais taupin à la fin des années 30, j'étais émerveillé par la Géométrie qu'on appelait alors, et depuis la fin du XIX^e siècle, « moderne » : une algèbre qu'on connaissait si bien que les calculs effectifs sur les coordonnées étaient devenus presque inutiles et que des calculs « virtuels » suffisaient.

Pierre Samuel [Sam86]

Introduction

Le titre de ce mémoire est une locution-valise formée sur les titres *Counting plane curves of any genus* et *Rational curves on algebraic varieties* des deux textes [CH98a] et [Kol96], qui à eux deux cernent bien les deux points de vue, duaux l'un de l'autre, que l'on peut adopter sur les familles de courbes sur les variétés : on peut chercher des résultats sur les courbes elles-mêmes et leurs espaces de modules, ou bien utiliser ces familles pour étudier les variétés qui les contiennent. L'étude des familles de courbes sur les variétés est le dénominateur commun des travaux exposés ici.

Je présente mes travaux de recherche dans les quatre premiers chapitres, qui commencent chacun par une introduction spécifique. Le premier est consacré aux variétés de Severi, qui sont les familles de courbes irréductibles nodales de genre et degré donnés sur une surface. Ces variétés ont tendance à se comporter beaucoup mieux lorsque la surface a fibré canonique négatif ou nul, et naturellement les résultats obtenus se concentrent sur ces surfaces.

L'étude des variétés de Severi m'a porté assez tôt vers des problèmes de nature énumérative, qui sont présentés dans le quatrième chapitre. On y trouve des résultats généraux, mais le problème central du chapitre concerne l'énumération des courbes sur les surfaces $K3$. Une part non congrue de ce chapitre est consacrée à des résultats de théorie de l'élimination. Ces derniers temps plusieurs voies m'ont porté vers les aspects effectifs de la géométrie algébrique ("calculer avec de vrais polynômes", écrire des résolutions explicites d'idéaux, etc.) et j'aimerais poursuivre, entre autres, dans cette direction.

Le second chapitre est consacré à un résultat de géométrie des variétés uniréglées, qui incarne le principe selon lequel on peut caractériser ces variétés par leurs familles de courbes rationnelles minimales.

Enfin je présente dans le troisième chapitre des résultats ayant trait à des applications modulaires d'oubli pour les surfaces $K3$ et d'Enriques, et à leurs relations avec des questions d'extensibilité. Les applications modulaires considérées partent d'un espace module de paires (S, C) où S est une surface et C une courbe section hyperplane de S , et au module de (S, C) associent le module de C toute seule. Une variété plongée $X \subseteq \mathbf{P}^N$ est extensible s'il existe $Y \subseteq \mathbf{P}^{N+1}$ qui n'est pas un cône, et telle que X est section hyperplane de Y .

Le dernier chapitre indique des domaines que je voudrais explorer par la suite. Au fil des quatre premiers chapitres je souligne quelques grandes questions restant ouvertes, et signale des projets plus ou moins ambitieux qu'il me semble plausible d'entreprendre. Certains compensent à mes yeux le manque d'ambition par des vertus pédagogiques. Au contraire dans le dernier chapitre j'ai tâché de donner des directions plus novatrices, même si elles sont évidemment reliées aux questions sur lesquelles j'ai réfléchi jusqu'ici.

Mes travaux concernent pour une grande part les variétés spéciales, disons pour faire simple les variétés à dimension de Kodaira nulle ou négative. Ces variétés sont comme leur nom l'indique plutôt rares dans la nature, mais ce sont celles dont la géométrie est la plus riche. Ces deux points sont encore accentués par le fait que les variétés considérées dans mes travaux sont le plus souvent

de petite dimension. Si on me passe un élan de lyrisme exagéré, je comparerais cette situation à celle de la vie sur terre : un hasard cosmique aussi insondablement rare que fourmillant de curiosités ; si l’astrophysique est pleinement honorable, la biologie l’est tout autant. À propos de la géométrie en petite dimension (plane, en fait), je conseille chaleureusement le monumental essai [Per].

En particulier les surfaces $K3$ sont très présentes dans mes travaux. Elles occupent une place unique dans la classification des variétés algébriques. J’ai renoncé à en donner une présentation systématique dans ce mémoire, mais j’espère que le lecteur partagera au fil du texte certains aspects de leur géométrie si particulière que j’ai pu découvrir à force de les examiner et d’en discuter avec mes compagnons de route.

Je suis arrivé à la géométrie algébrique par la géométrie projective, dont j’ai gardé le goût, ce qui il me semble devrait se sentir tout au long du texte. Plus tard j’ai découvert la notion de dualité projective presque simultanément par deux voies : en commençant à explorer à Rome les aspects énumératifs des variétés de Severi, et en participant à un groupe de travail à Bayreuth consacré à la lecture de [GKZ08]. Depuis je suis fasciné par le théorème de bidualité et ses différentes incarnations. C’est une direction dans laquelle je compte poursuivre activement.

Ce texte est un mémoire présenté en vue de l’obtention d’un diplôme. À ce titre j’y présente avant tout mes travaux, et n’ai pas pensé ce texte comme un survol exhaustif des sujets qui y sont abordés. J’ai donc été particulièrement généreux avec les auto-citations, et n’ai pas hésité à être discret sur d’autres travaux pourtant importants. J’espère que le lecteur n’interprétera pas cette attitude comme un excès d’orgueil. Pour la raison donnée en début de paragraphe, ce texte s’adresse à des géomètres algébristes expérimentés. J’ai donc cherché à définir uniquement les notions qui me paraissent spécialisées.

Les références du type [1], [Y.1], [Z.1], [0.1], et [TV.1] pointent vers les travaux listés dans le chapitre “Liste des travaux” ; toutes les autres références entre crochets pointent vers les travaux listés dans le chapitre “Références”. Pour qui lit ce texte au format électronique, je signale que les références devraient toutes être “cliquables”, même si les liens hypertextes sont invisibles.

La plupart du temps on travaille sur le corps des nombres complexes \mathbf{C} .⁴

4. Quand j’étais petit on m’a enseigné qu’il faut le désigner par un caractère gras, les caractères éclairés \mathbf{C} en étant le pis-aller utilisé au tableau, d’où sans doute le nom de la police *maths blackboard*.

1 – Variétés de Severi

Les variétés de Severi dont il est question dans ce chapitre sont les familles de courbes nodales de genre et classe d'équivalence linéaire prescrits sur une surface algébrique. Précisément, soit (S, L) une paire constituée d'une surface S et d'un fibré inversible effectif L sur S ; pour tout entier $\delta \geq 0$ on définit la *variété de Severi* $V^{L, \delta}$ comme le lieu localement fermé dans le système linéaire $|L|$ des courbes intègres dont les singularités sont exactement δ points doubles ordinaires, aussi appelés *nœuds*⁵. Une courbe est dite *nodale* si ses seules singularités sont des points doubles ordinaires. Les courbes appartenant à $V^{L, \delta}$ ont toutes le même genre géométrique $p - \delta$, où $p := p_a(L)$ est le genre arithmétique de tous les membres du système linéaire $|L|$. Lorsque l'irrégularité $q = h^1(S, \mathcal{O}_S)$ de S n'est pas nulle, on pourra remplacer la classe d'équivalence linéaire $L \in \text{Pic}(S)$ par une classe ξ du groupe de Néron–Severi de S .

Les variétés de Severi tiennent leur nom de [Sev21] ; l'idée de Severi était d'utiliser le fait que toute courbe possède un modèle plan nodal (obtenu par projection générique depuis un modèle dans un espace projectif plus grand, par exemple un modèle pluricanonique) pour étudier les modules des courbes : puisque les courbes planes sont données par une seule équation, il est facile de fabriquer un espace de paramètres pour elles.⁶ Il ne faut cependant pas se laisser abuser par cette apparente simplicité, le monde des courbes planes est plein de pièges subtils et redoutables. De ce point de vue il est naturel de se demander, étant donné une surface S et un fibré L (ou plus généralement une famille \mathcal{S} de paires (S, L)), quelles sont les courbes qui apparaissent comme normalisation d'un membre de $V^{L, \delta}$, autrement dit quelle est l'image de l'application des modules $[C] \in V^{L, \delta} \mapsto [\tilde{C}] \in \mathcal{M}_g$, où \tilde{C} désigne la normalisation de C . Cette question est un analogue pour les courbes singulières de la question centrale du chapitre 3, voir (3.1).

On peut renverser la perspective, et considérer les variétés de Severi comme des objets géométriques attachés à une surface polarisée. D'une part elles encodent des propriétés importantes de la surface (par exemple pour les surfaces $K3$, l'existence d'une infinité de courbes rationnelles, ou de familles couvrantes de courbes elliptiques), et d'autre part elles permettent de définir des invariants. Par exemple, à une surface $K3$ polarisée (S, L) on peut attacher le diviseur somme de toutes les courbes rationnelles dans $|L|$, ou encore la courbe paramétrant les courbes elliptiques dans $|L|$. À propos de cette dernière courbe, une question intrigante (que m'a posée Edoardo Sernesi) est de déterminer si l'application "à la Torelli" $(S, L) \mapsto V^{L, p-1}$ est injective ; je remarque au passage que calculer le genre de la courbe $V^{L, p-1}$ n'a *a priori* rien d'évident. Ceci sans oublier les invariants énumératifs "à la Gromov–Witten" comptant les courbes passant par un nombre approprié de points, qui ne sont autre que les degrés des variétés de Severi (ou plutôt de leurs adhérences de Zariski) dans l'espace projectif $|L|$, dont il sera question au chapitre 4.

Enfin, les variétés de Severi sont bien sûr elles-mêmes des variétés algébriques, dont la géométrie intrinsèque peut se comprendre à travers le prisme de la géométrie sur la surface de départ. Elles fournissent à ce titre des exemples particulièrement intéressants de variétés sur lesquelles tester des théories générales issues d'autres horizons, par exemple le programme du modèle minimal (MMP), ou la théorie de l'intersection (description de l'anneau de Chow des variétés de Severi), à l'instar de programmes menés sur les espaces de modules \mathcal{M}_g de courbes "toutes nues", entre autres par Brendan Hassett.

5. ici "nœud" est à entendre au sens botanique du terme, comme le point d'un tronc d'où part une branche nouvelle, plutôt qu'au sens plus courant d'un entrecroisement de plusieurs brins ; en anglais on distingue "node" (le sens qui nous intéresse) de "knot" (celui qu'on gardera pour nos lacets de chaussure).

6. Une autre façon d'associer une hypersurface à une courbe C consiste à considérer l'hypersurface duale C^\vee de C dans son plongement, disons, tricanonique.

Les questions basiques qu'on se pose à propos des variétés de Severi sont les suivantes.

- 1) Non vacuité. Étant donné (S, L) et δ , la variété $V^{L, \delta}$ est-elle non-vide ? Il faut imposer $\delta \leq p$ pour qu'il puisse y avoir des courbes irréductibles δ -nodales, mais on impose souvent en plus la condition $\delta \leq \dim(|L|)$, en lien avec la question suivante.
- 2) Régularité. En tout point $[C] \in V^{L, \delta}$, la variété de Severi a codimension au plus δ dans $|L|$, et espace tangent (de Zariski)

$$T_{V^{L, \delta}, [C]} \cong H^0(S, L \otimes \mathcal{I}_{\Delta/S}) / \langle s_C \rangle$$

où Δ est l'ensemble des nœuds de C , $\mathcal{I}_{\Delta/S}$ le faisceau d'idéaux de \mathcal{O}_S correspondant, et $s_C \in H^0(S, L)$ une section s'annulant exactement le long de C . On dit que la variété de Severi $V^{L, \delta}$ est *régulière* au point $[C]$ si elle est lisse en ce point, et de dimension égale à la *dimension attendue* $\dim(|L|) - \delta$; ceci équivaut à ce que les nœuds de C imposent des conditions indépendantes au système linéaire $|L|$.

- 3) Irréductibilité. On se demande si les variétés de Severi sont des variétés irréductibles.
- 4) Densité dans la famille des courbes de genre $p - \delta$. Pour tout entier $g \geq 0$, on définit la variété V_g^L comme le lieu localement fermé dans $|L|$ des courbes intègres de genre géométrique g . Pour $\delta = p - g$, on a l'inclusion

$$V^{L, \delta} \subseteq V_g^L.$$

On pourra appeler V_g^L variété de Severi *équigénérique*⁷; la variété de Severi classique $V^{L, \delta}$ sera dite *nodale* pour éviter les confusions. On se demande si la variété de Severi nodale est dense dans la variété de Severi équigénérique, autrement dit si les adhérences de $V^{L, \delta}$ et V_g^L sont égales.

- 5) Énumération. Soit n la dimension de la variété de Severi $V^{L, \delta}$. Par n points généraux de S il passe un nombre fini de courbes C telles que $[C]$ appartienne à $V^{L, \delta}$. On se demande quel est ce nombre.

J'ai commencé par m'intéresser aux variétés de Severi des surfaces $K3$ suite à un sujet proposé par Claire Voisin pour ma thèse, qui a donné lieu à l'article [0.1]. Elles ont ensuite constitué l'un des thèmes centraux de ma recherche, qui m'a conduit dans différentes directions. Je commence par présenter un des premiers résultats obtenus après mon doctorat, qui à la fois est dans la continuité de [0.1] et met en œuvre des idées qui sont communes avec les travaux plus récents présentés au chapitre 3. Je traite à part les aspects énumératifs de la géométrie des variétés de Severi, au chapitre 4.

1.1 – Variétés de Severi universelles des surfaces $K3$

Les variétés de Severi universelles sont la version en famille des variétés de Severi introduites précédemment. Je donne la définition dans le cas des surfaces $K3$ qui nous intéresse ici. Pour tout entier $g \geq 2$, on note $\mathcal{K}_g^{\text{prim}}$ l'espace de modules des surfaces $K3$ primitivement polarisées de genre g .⁸ Les variétés de Severi des surfaces $K3$ sont régulières, au sens donné en introduction de ce chapitre, en particulier pour tout $(S, L) \in \mathcal{K}_g^{\text{prim}}$ la variété $V^{L, \delta}$ est lisse de dimension $g - \delta$, le genre géométrique des courbes paramétrées par $V^{L, \delta}$.

On considère pour tous entiers $k \geq 1$ et $\delta \geq 0$ la *variété de Severi universelle*

$$\mathcal{V}_g^{k, \delta} = \left\{ (S, C) : (S, \mathcal{O}_S(\frac{1}{k}C)) \in \mathcal{K}_g^{\text{prim}} \text{ et } C \in V^{\mathcal{O}_S(C), \delta} \right\}.$$

J'ai étudié ces objets dans ma thèse, où la conjecture suivante est formulée.

⁷. car paramétrant des courbes de genre constant.

⁸. Classiquement, cet espace est plutôt noté \mathcal{F}_g , comme *Fläche* je suppose (surface, en allemand); je préfère la notation \mathcal{K}_g plus explicite, et réserve \mathcal{F}_g pour les solides de Fano, suivant [Bea04].

(1.1) Conjecture. *Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une constante M_ε telle que pour tous entiers k et δ tels que*

$$k \geq M_\varepsilon \quad \text{et} \quad 0 \leq \delta \leq (1 - \varepsilon)p_a(k),$$

la variété de Severi universelle $\mathcal{V}_g^{k,\delta}$ est irréductible.

(On note $p_a(k) = 1 + k^2(g - 1)$ le genre arithmétique commun des membres de $|kL|$ pour $(S, L) \in \mathcal{K}_g^{\text{prim}}$).

L'un des résultats centraux de ma thèse est que cette conjecture implique qu'une surface $K3$ générale ne possède pas d'endomorphisme rationnel de degré strictement supérieur à 1. Xi Chen [Chx] a proposé il y a une dizaine d'années une preuve inconditionnelle de ce dernier énoncé, dont le statut ne semble à ce jour toujours pas être définitif.

La conjecture (1.1) est une version faible, suffisante pour les besoins du résultat dont on vient de parler, de la conjecture affirmant que toutes les variétés de Severi universelles des surfaces $K3$ sont irréductibles. Cette dernière est elle-même une version faible de la conjecture affirmant que pour toute surface $K3$ primitivement polarisée (S, L) , si le groupe de Picard de S est engendré par L alors pour tout $\delta < p_a(k)$ la variétés de Severi $\mathcal{V}^{kL,\delta}(S)$ est irréductible (dans cette dernière version, il faut exclure le cas d'égalité $\delta = p_a(k)$, puisque les variétés de Severi de courbes rationnelles sur une $K3$ sont constituées d'un nombre fini de points). L'irréductibilité des variétés $\mathcal{V}^{kL,\delta}(S)$ est l'objet de la section 1.3 plus avant dans le texte.

Avec Ciro Ciliberto, nous avons démontré le résultat suivant.

(1.2) Théorème [1]. *Si g vérifie $3 \leq g \leq 11$, $g \neq 10$, alors pour tout $\delta = 0, \dots, g$ la variété de Severi universelle $\mathcal{V}_g^{1,\delta}$ est irréductible.*

Preuve. Le principe est de compléter la variété $\mathcal{V}_g^{1,\delta}$ de sorte qu'il existera un point contenu dans les adhérences de toutes ses composantes irréductibles, puis de montrer que la variété de Severi universelle est lisse en ce point. Ce point correspondra à un cône sur une courbe nodale.

La complétion se fait en remplaçant tous nos espaces de modules par leurs contreparties dans le schéma de Hilbert de \mathbf{P}^g . La théorie des déformations des courbes nodales dans les surfaces $K3$ nous assure que la variété $\mathcal{V}_g^{1,\delta}$ est équidimensionnelle, et toutes ses composantes irréductibles dominant $\mathcal{K}_g^{\text{prim}}$. Ceci permet de raisonner en ne considérant que les surfaces dont la polarisation est très ample, et ainsi de substituer à $\mathcal{K}_g^{\text{prim}}$ la composante irréductible \mathcal{HK}_g du schéma de Hilbert de \mathbf{P}^g paramétrant des surfaces $K3$ primitives de genre g , et à $\mathcal{V}_g^{1,\delta}$ la réunion des composantes \mathcal{HKC}_g^δ du schéma de Hilbert de drapeaux de \mathbf{P}^g paramétrant les paires (S, C) avec $[S] \in \mathcal{HK}_g$ et C section hyperplane de S , δ -nodale et irréductible (on notera simplement \mathcal{HKC}_g pour \mathcal{HKC}_g^0). Il suffit de prouver que \mathcal{HKC}_g^δ est irréductible.

Notons enfin \mathcal{HC}_g la composante du schéma de Hilbert paramétrant les courbes canoniques de genre g contenues dans un hyperplan de \mathbf{P}^g , et $\mathcal{HC}_g^\delta \subseteq \mathcal{HC}_g$ l'adhérence dans \mathcal{HC}_g du lieu des courbes irréductibles δ -nodales. Il est assez clair que \mathcal{HC}_g est irréductible (puisque l'on sait que l'espace de modules des courbes \mathcal{M}_g est irréductible), et \mathcal{HC}_g^δ l'est tout autant, dominant le lieu irréductible $\mathcal{M}_g^\delta \subseteq \overline{\mathcal{M}}_g$ des courbes irréductibles δ -nodales (on a une application rationnelle dominante $\mathcal{M}_g^\delta \dashrightarrow \mathcal{M}_{g-\delta}$ dont la fibre au dessus de C générale est le produit symétrique $\text{Sym}^\delta(\text{Sym}^2(C))$).

On considère le morphisme d'oubli

$$p : \mathcal{HKC}_g \rightarrow \mathcal{HC}_g ;$$

\mathcal{HKC}_g^δ est la pré-image par p de \mathcal{HC}_g^δ . Toutes les composantes de \mathcal{HKC}_g^δ ont la même dimension, et on a

$$\dim(\mathcal{HKC}_g^\delta) - \dim(\mathcal{HC}_g^\delta) = \dim(\mathcal{HKC}_g) - \dim(\mathcal{HC}_g) = 23 - g$$

(on reconnaît le fameux⁹ $22 - 2g = \dim(\mathcal{V}_g^{1,g}) - \dim(\mathcal{M}_g)$, auquel a été ajouté $g + 1$, la dimension du sous-groupe de $\mathrm{PGL}(g + 1)$ fixant un hyperplan). D'autre part, l'espace tangent de Zariski de la fibre de p en un point $[S, C]$ est

$$T_{p^{-1}(C), [S, C]} \cong H^0(S, N_{S/\mathbf{P}^g}(-1)),$$

indépendant du choix de la section hyperplane C de S .

Soit \mathcal{V} une composante irréductible de \mathcal{HKC}_g^δ , et $[S, C]$ un point général de \mathcal{V} . Alors par une construction due à Pinkham (voir ci-dessous), \mathcal{V} contient le point $[S_C, C]$ où S_C est le cône sur C de sommet n'importe quel point en dehors de l'hyperplan engendré par C . Pour ce cône, on a

$$(1.2.1) \quad H^0(S_C, N_{S_C/\mathbf{P}^g}(-1)) \cong \bigoplus_{k \geq 1} H^0(C, N_{C/\mathbf{P}^{g-1}}(-k)).$$

Par semi-continuité, on borne supérieurement les dimensions des groupes de cohomologie du membre de droite ci-dessus en considérant une dégénérescence de C vers une *courbe graphe* (qui est une courbe stable canonique de genre g , dont toutes les composantes irréductibles sont des droites), pour laquelle on sait calculer explicitement ces groupes de cohomologie. On obtient

$$\dim(T_{p^{-1}(C), [S_C, C]}) \leq 23 - g,$$

dont on déduit que i) \mathcal{V} domine \mathcal{HC}_g^δ , et ii) $[S_C, C]$ est un point lisse de \mathcal{HKC}_g^δ , ce qui conclut la preuve. \square

Notons que la preuve ci-dessus donne en prime l'énoncé suivant.

(1.3) Théorème. *Si g vérifie $3 \leq g \leq 11$, $g \neq 10$, alors pour tout δ l'application rationnelle*

$$m_g^\delta : \mathcal{V}_g^{1,\delta} \dashrightarrow \mathcal{M}_{g-\delta},$$

qui à $[S, C]$ associe le module de la normalisation \bar{C} de C , est dominante.

Pour $\delta = 0$, il s'agit d'un théorème bien connu de Mukai et Mori–Mukai (voir chapitre 4 ; la preuve donnée ici est exactement celle de [CM90]). Pour $\delta > 0$, le résultat avait déjà été démontré précédemment par Flamini–Knutsen–Pacienza–Sernesi [FKPS08], par une autre méthode. En fait, ces derniers démontrent le même résultat pour $g = 10$ et $\delta > 0$, bien que pour $\delta = 0$ l'image de m_{10}^0 soit un diviseur de \mathcal{M}_{10} .

Il est tentant de vouloir pousser plus loin la méthode ci-dessus, dans la mesure où une bonne partie des ingrédients semble disponible en plus grande généralité. Notamment, l'argument de dégénérescence vers des courbes graphes permet d'obtenir la dimension des fibres de p et la lissité des points $[S_C, C]$ correspondant aux cônes, voir [CLM93] et les références qu'il contient. Le point bloquant est le suivant : en général \mathcal{HKC}_g^δ ne domine pas \mathcal{HC}_g^δ , et deux composantes irréductibles \mathcal{V} et \mathcal{V}' de \mathcal{HKC}_g^δ ont des images $p(\mathcal{V})$ et $p(\mathcal{V}')$ différentes ; pour pouvoir conclure comme ci-dessus il faudrait réussir à s'assurer que l'intersection de $p(\mathcal{V})$ et $p(\mathcal{V}')$ est non-vide, ce qui est plausible mais nécessite de trouver un nouvel argument.

9. voir (3.12.1)

Dans le cas $g = 10$, on sait que p ne domine pas \mathcal{HC}_{10} , et donc sa restriction aux $\mathcal{HCC}_{10}^\delta$ ne domine pas les \mathcal{HC}_{10}^δ . Pourtant pour $\delta > 0$ l'application m_{10}^δ est dominante, ce qui signifie qu'une courbe générale de genre $10 - \delta$ est la normalisation d'une section hyperplane d'une surface $K3$ de genre 10, mais qu'on ne peut pas choisir arbitrairement les points identifiés pour créer les nœuds.

(1.4) La construction de Pinkham. Je donne ici une brève description de la construction permettant de faire dégénérer une paire (X, Z) , où $X \subseteq \mathbf{P}^N$ est une variété arithmétiquement Cohen–Macaulay et $Z = H \cap X$ une section hyperplane de X , vers (X_Z, Z) où X_Z est un cône sur Z de sommet $v \notin H$.

Cette construction est en quelque sorte inverse de celle de Wahl décrite au chapitre 3 (et au coeur de l'approche de [5]) qui permet, sous des hypothèses favorables, de construire une extension de Z en déformant le cône X_Z . Dans la même idée, j'attire l'attention sur le fait que les protagonistes de l'identité (1.2.1) entreront de nouveau en scène au chapitre 3 où ils joueront un rôle important.

On considère $\hat{X} \subseteq \mathbf{P}^{N+1}$ le cône projectif au dessus de X , dont X est section par l'hyperplan $\langle X \rangle = \mathbf{P}^N$. La dégénérescence qui nous intéresse est la famille des sections de \hat{X} par les hyperplans de \mathbf{P}^{N+1} contenant H , qui forment un pinceau. Ces sections sont toutes isomorphes à X , sauf lorsque l'hyperplan passe par le sommet du cône \hat{X} , auquel cas on obtient le cône X_Z sur Z . Le fait que $X \subseteq \mathbf{P}^N$ est arithmétiquement Cohen–Macaulay garantit la platitude de cette famille.

On peut voir cette construction de façon paramétrique, en considérant une famille de projectivités $\omega_t \in \mathrm{PGL}(N+1)$ laissant fixe l'hyperplan H et tendant vers la projection depuis un point $v \notin H$.

(1.5) Monodromie des courbes rationnelles. Pour les courbes rationnelles, les applications

$$\mathcal{V}_g^{k, p_a(k)} \rightarrow \mathcal{K}_g$$

ont des fibres de dimension 0, et on peut légitimement se demander si les groupes de monodromie correspondants sont les groupes symétriques $\mathfrak{S}_{N_{g,k}}$, où $N_{g,k}$ est le nombre de courbe rationnelles irréductibles nodales dans $|kL|$ pour (S, L) une surface $K3$ primitive de genre g suffisamment générale. Bien sûr il est sans doute plus raisonnable de commencer par le cas primitif $k = 1$, dans lequel on sait par [Chx02] que toutes les courbes rationnelles dans $|L|$ sont nodales si (S, L) est générale.

Nous avons posé cette question avec Ciro Ciliberto dans [2], où nous avons aussi obtenu des résultats partiels en direction d'une réponse affirmative pour les quartiques de \mathbf{P}^3 ($g = 3$ et $k = 1$). Dans la pré-publication récente [Zha], Sailun Zhan a démontré qu'on obtient bien les groupes symétriques \mathfrak{S}_{324} et \mathfrak{S}_{3200} dans le cas des doubles plans sextiques et des quartiques, respectivement $g = 2$ et $g = 3$, et $k = 1$.

Sa preuve suit la méthode employée par Joe Harris dans [Hrs79], qui consiste à montrer d'une part que l'action de monodromie est doublement transitive, et d'autre part que le groupe de monodromie contient une transposition, ce qui suffit pour conclure. Le premier point est relativement élémentaire, et le second s'obtient en exhibant une surface sur laquelle il y a exactement une courbe rationnelle qui doit être comptée avec multiplicité 2 (cette courbe n'est donc pas nodale), tandis que toutes les autres sont nodales. Ceci est rendu possible par la bonne connaissance dont on dispose à propos des variétés duales d'une sextique plane et d'une quartique de \mathbf{P}^3 respectivement, et en particulier des diverses formules énumératives qui leurs sont attachées. Ces objets seront étudiés dans le chapitre 4.

Il semble raisonnable d'espérer que cette méthode puisse s'exporter à d'autres cas, et notamment aux variétés de Severi universelles des courbes 3-nodales sur les surfaces d -iques de \mathbf{P}^3 pour tout $d \geq 4$, voire à d'autres cas en petite codimension supérieure à 1. On peut aussi considérer un problème analogue pour les courbes avec d'autres singularités apparaissant en nombre fini sur une surface d -ique, par exemple les courbes avec deux nœuds et un cusp, avec un tacnoeud, etc.

1.2 – Densité des courbes nodales dans les familles équigénériques

Si on s'intéresse aux courbes de genre (géométrique) g donné dans un système linéaire \mathcal{L} sur une surface, il est relativement arbitraire de se limiter à considérer des courbes nodales. Un argument en faveur de cette attitude est le suivant : soit $\delta = p - g$ la différence entre le genre des membres généraux de \mathcal{L} et le genre g qui nous intéresse ; si $\delta > 0$, les courbes de genre g dans \mathcal{L} sont nécessairement singulières, et la codimension attendue du lieu des courbes δ -nodales est δ , tandis que la codimension attendue du lieu des courbes avec tout autre type de singularité conduisant au genre δ est strictement plus grande. Bien entendu le mot sensible dans la phrase précédente est "attendue", et on sait bien que c équations ne définissent pas toujours un lieu de codimension c (je suis même tenté de dire que l'étude de ce genre de phénomène est un aspect essentiel de la géométrie algébrique).

Avec Edoardo Sernesi, nous nous sommes intéressés dans l'article [3] à la question de la densité des variétés de Severi nodales $V^{L,\delta}$ dans les variétés de Severi équigénériques V_g^L posée en introduction de ce chapitre.

Cette question avait déjà été résolue pour les courbes planes indépendamment par Zariski [Zar82] et Arbarello et Cornalba [AC80, AC81b], avec deux approches différentes, puis reprise par Harris [Hrs86]. Une part importante de notre travail a été de remettre à plat les idées contenues dans ces textes, puis à les mettre en œuvre de manière plus systématique. Ceci nous a permis d'écrire des énoncés généraux (notamment le théorème (1.6) ci-dessous), pour ensuite donner des éléments de réponse à la question de la densité pour les surfaces de dimension de Kodaira nulle, voir théorème (1.7) et proposition (1.9). Cela a aussi été l'occasion de mettre au jour une erreur dans [Hrs86] (ensuite contournée dans [HrM98]), reproduite dans [Chx99], voir (1.8). Enfin nous avons construit un certain nombre d'exemples, montrant en particulier qu'il est tout-à-fait possible en général que les courbes nodales ne soient pas denses dans les variétés de Severi équigénériques.

L'approche initiée par Arbarello et Cornalba est paramétrique, en ce qu'elle considère une courbe (le plus souvent singulière) $C \subseteq S$ comme le morphisme $\bar{C} \rightarrow S$, obtenu par composition avec la normalisation $\bar{C} \rightarrow C$. En utilisant ces idées, on obtient le résultat suivant.

(1.6) Théorème [3]. *Soit S une surface algébrique lisse, et $\xi \in \text{NS}(S)$. Soit V une composante irréductible de la variété de Severi équigénérique V_g^ξ , et $[C] \in V$ un point général, de normalisation $\phi : \bar{C} \rightarrow S$.*

(1.6.1) *Si les deux hypothèses suivantes sont vérifiées :*

(a) $\omega_{\bar{C}} \otimes \phi^* \omega_S^{-1}$ est globalement engendré ;

(b) $\dim(V) \geq h^0(\bar{C}, \omega_{\bar{C}} \otimes \phi^* \omega_S^{-1})$;

alors C est immergée, autrement dit en tout point x la courbe C est constituée de branches locales lisses (éventuellement non transverses).

(1.6.2) *Si l'hypothèse suivante est vérifiée en plus des deux précédentes :*

(c) *le fibré en droites $\omega_{\bar{C}} \otimes \phi^* \omega_S^{-1}$ sépare les triplets de points (éventuellement infiniment proches), i.e.,*

$$h^0(\bar{C}, \omega_{\bar{C}} \otimes \phi^* \omega_S^{-1}(-A)) = h^0(\bar{C}, \omega_{\bar{C}} \otimes \phi^* \omega_S^{-1}) - 3$$

pour tout diviseur effectif A de degré 3 sur \bar{C} ;
alors C est nodale. De manière équivalente $V \subseteq \bar{V}^{\xi, \delta}$, avec $\delta = p_a(\xi) - g$.

Preuve. Les déformations du morphisme ϕ (par quoi on entend les déformations à but fixé, mais dont l'origine peut varier) sont contrôlées par le faisceau $N_\phi = \text{coker}(T_{\bar{C}} \rightarrow \phi^*T_S)$. Le sous-faisceau de torsion \mathcal{H}_ϕ de N_ϕ est supporté sur le diviseur de ramification Z de ϕ , et le quotient $\bar{N}_\phi = N_\phi/\mathcal{H}_\phi$ s'identifie à $\omega_{\bar{C}} \otimes \phi^*\omega_S^{-1}(-Z)$.

L'observation fondamentale d'Arbarello et Cornalba est que les déformations infinitésimales de ϕ correspondant à la partie de torsion \mathcal{H}_ϕ induisent une déformation nulle de l'image C . On obtient ainsi l'inégalité

$$\dim(V) \leq h^0(\bar{C}, \omega_{\bar{C}} \otimes \phi^*\omega_S^{-1}(-Z)),$$

qui conjuguée aux deux hypothèses (a) et (b) implique $Z = 0$ comme on voulait.

La démonstration du point (1.6.2) utilise des arguments plus *ad hoc*. Il s'agit de voir qu'en aucun point la courbe C ne possède plus de deux branches locales, et que deux branches locales sont toujours transverses. Supposons par l'absurde qu'il existe un point x où C possède au moins trois branches locales. Alors la condition (c) montre qu'il est possible de déformer $\phi : \bar{C} \rightarrow S$ en maintenant fixes deux branches en x et en faisant bouger non trivialement la troisième. Ceci contredit la généralité de $[C]$ dans V , puisque un ouvert dense de V est constitué de courbes ayant toutes les mêmes singularités. Le cas de deux branches non transverses se traite de manière similaire. \square

L'avantage de l'approche paramétrique est qu'elle est assez commode à manipuler, en particulier les hypothèses de l'énoncé ci-dessus sont à vérifier sur la courbe lisse \bar{C} et non pas sur la courbe singulière C . Le fait que la courbe C soit immergée ou non est écrit dans le génome de ϕ , et s'inspecte donc naturellement en termes des déformations de ϕ . Ainsi, la partie (1.6.1) est relativement optimale. En revanche le morphisme ϕ ne voit pas vraiment les singularités immergées, et le contrôle du fait que C soit nodale une fois qu'on sait qu'elle est immergée est assez artificiel. Ainsi, l'hypothèse (c) est plus forte que ce qu'on voudrait, et demande trop de positivité au diviseur $-K_S$ par rapport à ce qui semble vraiment nécessaire.

Pour les surfaces rationnelles "classiques" (disons les surfaces rationnelles minimales et les surfaces de Del Pezzo), on a suffisamment de marge de manœuvre pour obtenir malgré tout des résultats optimaux, mais pour les surfaces à canonique numériquement trivial ceci fait qu'on ne répond complètement à la question de la densité que dans certains cas. L'énoncé suivant s'obtient assez directement à partir du théorème (1.6).

(1.7) Théorème [3]. *Soit S une surface K3 algébrique (resp. une surface abélienne), et $\xi \in \text{NS}(S)$. Soit $g \leq p_a(\xi)$ un entier tel que $g > 0$ (resp. $g \geq 2$). Pour toute composante irréductible $V \subseteq V_g^\xi$, un membre général $[C] \in V$ est une courbe immergée. Si de plus la normalisation \bar{C} est non trigonale, alors C est nodale.*

Soit S une surface d'Enriques, et $\xi \in \text{NS}(S)$. Soit $g \leq p_a(\xi)$ un entier tel que $g \geq 3$. Pour toute composante irréductible $V \subseteq V_g^\xi$, un membre général $[C] \in V$ est une courbe immergée si \bar{C} est non hyperelliptique, et une courbe nodale si \bar{C} a indice de Clifford ≥ 5 .

Pour les surfaces K3, les courbes rationnelles sont rigides et il est facile de construire des exemples où elles ne sont pas immergées. Pour les surfaces abéliennes les courbes de genre 2 sont rigides à translations près ; le caractère immergé dans ce cas provient d'un théorème de Lange et Sernesi [LS02].

Il est en général assez facile de montrer l'inégalité (b) du théorème (1.6), grâce à l'estimation

$$\dim_\phi(V) \geq \chi(N_\phi)$$

et au théorème de Riemann–Roch. Dans le cas des surfaces $K3$ et abéliennes cela donne seulement $\dim_\phi(V) \geq g - 1$, mais on obtient la bonne estimation $\dim_\phi(V) \geq g$ par un argument bien connu de déformation à des surfaces non-algébriques.

Je souligne cependant que ces estimations ne garantissent en aucun cas que les variétés de Severi V_g^ξ soient non vides, ce qui est en général assez difficile à démontrer. C’est connu pour une surface $K3$ générique (S, L) : Xi Chen [Chx99] a démontré l’existence de courbes rationnelles nodales dans $|kL|$ pour tout k , ce qui permet d’obtenir des courbes de genre arbitraire en lissant les nœuds indépendamment, ce qui est possible par régularité des variétés de Severi. Pour une surface abélienne polarisée générale, la non vacuité de V_g^L a été démontrée par Knutsen, Lelli-Chiesa et Mongardi [KLM19, KL]. Pour les surfaces d’Enriques, nous sommes en train de terminer un article¹⁰ à ce sujet avec Ciliberto, Knutsen et Galati, voir la section 1.5.

Enfin, je note qu’il existe des critères permettant de vérifier dans certains cas que la normalisation d’une courbe sur une surface $K3$ ou abélienne est non trigonale. Si (S, L) est une surface $K3$ polarisée de genre p telle que $\text{Pic}(S) = \mathbf{Z}.L$, alors par [CK14, Thm 3.1] il suffit que

$$g + \left\lfloor \frac{g}{4} \right\rfloor (g - 2 \left\lfloor \frac{g}{4} \right\rfloor - 2) > p,$$

où g est le genre de $C \in |L|$. Si (S, L) est une surface abélienne polarisée de type $(1, n)$ générale, alors il suffit que $g \geq 5$ [KLM19, Thm. 1.3].

Pour les surfaces $K3$, nous avons réussi à obtenir un résultat un peu meilleur en suivant l’approche de Zariski. Celle-ci est dite cartésienne, dans la mesure où elle considère les courbes $C \subseteq S$ directement comme des lieux définis par des équations. Elle présente des caractéristiques “duales” de celles de l’approche paramétrique : elle distingue très bien le rôle particulier des singularités nodales, mais elle est délicate à mettre en œuvre en pratique.

(1.8) Soit C une courbe réduite dans une surface lisse S . On a deux faisceaux d’idéaux de \mathcal{O}_C : $I \subseteq A \subseteq \mathcal{O}_C$, tels que

- (i) $H^0(C, I \otimes \mathcal{O}_C(C))$ est l’espace tangent au point $[C]$ de $\text{ES}(C)$, l’espace des déformations de C dans S à singularités topologiquement constantes;¹¹
- (ii) $H^0(C, A \otimes \mathcal{O}_C(C))$ contient le cône tangent réduit au point $[C]$ de la variété de Severi équivariante $V_{g(C)}^\xi$, ξ étant la classe de C dans le groupe de Néron–Severi de S .

Ainsi, pour démontrer la densité des courbes nodales dans une variété de Severi V_g^ξ , il suffit de démontrer qu’au point général $[C]$ de toute composante irréductible de V_g^ξ on a l’inégalité

$$(1.8.1) \quad h^0(C, I \otimes \mathcal{O}_C(C)) < h^0(C, A \otimes \mathcal{O}_C(C)),$$

rendue plausible par le fait qu’en un point singulier p de C , les deux idéaux I et A coïncident si et seulement si p est un nœud.

L’idéal A est l’adjoint de C dans S ; notant $\nu : \bar{C} \rightarrow C$ la normalisation de C , il existe un diviseur $\bar{\Delta}$ de \bar{C} tel que $A = \nu_* \mathcal{O}_{\bar{C}}(-\bar{\Delta})$, et on a l’égalité $\omega_{\bar{C}} = \nu^* \omega_C(-\bar{\Delta})$, qui donne en particulier

$$(1.8.2) \quad H^0(C, A \otimes \mathcal{O}_C(C)) \cong H^0(\bar{C}, \omega_{\bar{C}} \otimes \nu^* \omega_S^{-1}).$$

L’idéal I est dit idéal équisingulier de C , et a été défini dans [Wah74].

10. note *a posteriori* : désormais disponible en prépublication, arXiv:2109.10735.

11. ES pour *équisingulières*; pour une définition précise de cette notion délicate, suivant Zariski et Teissier, je renvoie à [3, §1] et aux références qui y sont données.

Si la courbe C a des singularités pires que des nœuds, on a une inclusion stricte $I \subsetneq A$. Si celle-ci pouvait être transportée dans la normalisation de C , on aurait alors par (1.8.2) l'inégalité stricte (1.8.1) dès que $\omega_C \otimes \nu^* \omega_S^{-1}$ est globalement engendré, ce qui répondrait à la question de la densité dans la plupart des cas intéressants. Malheureusement on a en général seulement une inégalité large $\nu^* I \subseteq \nu^* A$, et le raisonnement précédent ne fonctionne pas sans argument supplémentaire ; c'est là l'erreur commise dans [Hrs86] puis [Chx99], que nous étudions en détail dans [3, §3.3].

Nous posons la question [3, p. 196] : a-t-on une inégalité stricte $\nu^* I \subsetneq \nu^* A$ si et seulement si C possède des singularités non-immergées ?

Pour utiliser directement sur la courbe singulière C l'inégalité stricte $I \subsetneq A$, nous avons proposé d'utiliser la théorie des diviseurs généralisés introduite dans [Hrt86]. Si C est une courbe à singularités de Gorenstein (condition automatiquement vérifiée pour une courbe réduite dans une surface lisse), un *diviseur généralisé* sur C est la donnée d'un *idéal fractionnaire* de \mathcal{O}_C , c'est-à-dire un faisceau cohérent de \mathcal{O}_C -modules qui est un sous-faisceau non-nul du faisceau constant $K(C)$ des fonctions rationnelles sur C . Ceci nous a permis de démontrer le résultat suivant.

(1.9) Proposition [3]. *Soit (S, L) une surface K3 polarisée de genre p telle que $\text{Pic}(S) = \mathbf{Z} \cdot L$. Pour $g > \frac{p}{2}$, le membre général de V_g^L est une courbe nodale.*

Preuve. Soit $[C] \in |L|$ une courbe intègre de genre g , générale dans sa variété de Severi équilibrée ; il s'agit de démontrer l'inégalité

$$(1.9.1) \quad h^0(C, \mathcal{O}_C(C) \otimes I) < g.$$

On note E le diviseur généralisé de C défini par l'idéal I . On a par la formule d'adjonction $h^0(C, \mathcal{O}_C(C) \otimes I) = h^0(\omega_C(-E))$.

Puisque le groupe de Picard de S est engendré par L , la courbe C a indice de Clifford $\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor$ par [GL87, BFT10], et on a donc $h^0(\mathcal{O}_C(E)) < 2$, $h^1(\mathcal{O}_C(E)) < 2$, ou

$$\deg(E) - 2h^0(\mathcal{O}_C(E)) + 2 \geq \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor$$

(en observant que $\mathcal{O}_C(E)$ est un idéal fractionnaire, et en particulier un faisceau localement libre de rang 1). Dans tous les cas, on conclut en utilisant la formule de Riemann–Roch et la dualité de Serre qu'on a l'inégalité (1.9.1), puisque $g > \frac{p}{2}$. \square

Peu après, Xi Chen [Chx19] a réussi à démontrer que pour (S, L) générale comme ci-dessus, le membre général de V_g^L est une courbe nodale pour tout $g > 0$. Sa preuve consiste à démontrer que toute composante irréductible de V_g^L contient une composante de V_{g-1}^L dans son adhérence, et à utiliser le fait que toutes les courbes rationnelles dans $|L|$ sont nodales par [Chx02].

Ceci laisse la question grande ouverte pour les courbes dont la classe dans $\text{Pic}(S)$ n'est pas primitive. On verra des résultats dans cette direction dans la section 1.4.

(1.10) Version logarithmique. Dans le cadre d'un raisonnement par dégénérescence, il est nécessaire d'avoir une version logarithmique des énoncés précédents. Il s'agit de remplacer la surface S par une paire (S, R) , où R est un diviseur de bord, et d'ajouter à la définition des variétés de Severi des conditions de contact avec la courbe R . Lorsqu'on considère une famille de surfaces $(S_t)_{t \in \mathbf{D}}$ au dessus du disque \mathbf{D} , telle que pour $t \neq 0$ les surfaces S_t sont lisses, tandis que S_0 est la réunion transverse de deux surfaces S'_0 et S''_0 se rencontrant transversalement le long d'une courbe lisse R , les variétés de Severi des surfaces S_t tendent vers des objets construits à partir des variétés de Severi logarithmiques des deux paires (S'_0, R) et (S''_0, R) , voir (4.12). À

ma connaissance ceci a été observé en premier lieu dans un cadre algébro-géométrique dans l'article [CH98a]; cette idée a maintenant été largement répandue et étendue. La considération de variétés de Severi dans le cadre d'une dégénérescence de surfaces est au cœur du travail [2] décrit section 4.1.

Dans les notes [TV.3] j'ai mis en œuvre les résultats de [CH98a] pour étendre au cas logarithmique les résultats obtenus dans [3] par l'approche paramétrique. J'en profite pour donner un exemple de variété de Severi logarithmique *superabondante* : il s'agit d'un exemple pour lequel la condition du (1.11.0) ci-dessous n'est pas vérifiée, et pour lequel la dimension est strictement plus grande qu'attendue; il est tiré de [Z.2], et provient de la considération de revêtements doubles du plan. Il serait fort utile par ailleurs de disposer d'une référence définitive pour les résultats analogues dans le cadre des applications stables.

Notons $\underline{\mathbf{N}}$ l'ensemble des suites $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ d'entiers positifs avec seulement un nombre fini de termes non-nuls. Pour tout $\alpha \in \underline{\mathbf{N}}$, on pose

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots; \\ |I\alpha| &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n + \dots. \end{aligned}$$

Un ensemble Ω de cardinal $\alpha \in \underline{\mathbf{N}}$ est une suite d'ensembles $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \dots)$ telle que chaque Ω_i a cardinal α_i .

On considère dans toute la suite une paire (S, R) , où S est une surface algébrique lisse et R une courbe réduite sur S . Pour $g \in \mathbf{N}$, $\xi \in \text{NS}(S)$, et $\alpha, \beta \in \underline{\mathbf{N}}$ tels que

$$|I\alpha| + |I\beta| = \xi \cdot R,$$

on choisit un ensemble général $\Omega = (\{p_{i,j}\}_{1 \leq j \leq \alpha_i})_{i \geq 1}$ de α points sur R , et on définit $V_g^\xi(\alpha, \beta)(\Omega)$ comme l'ensemble des $[C] \in V_g^\xi$ telles que l'intersection $C \cap R$ est contenue dans le lieu lisse de R , et il existe α points $q_{i,j} \in C$, $1 \leq j \leq \alpha_i$, et β points $r_{i,j} \in \bar{C}$, $1 \leq j \leq \beta_i$, tels que

$$\forall 1 \leq j \leq \alpha_i : \quad \phi(q_{i,j}) = p_{i,j} \quad \text{et} \quad \phi^*R = \sum_{1 \leq j \leq \alpha_i} i q_{i,j} + \sum_{1 \leq j \leq \beta_i} i r_{i,j},$$

où $\nu : \bar{C} \rightarrow C$ est la normalisation de C , et $\phi : \bar{C} \rightarrow S$ sa composition avec l'inclusion dans S .

(1.11) Théorème. *Soit V une composante irréductible de $V_g^\xi(\alpha, \beta)(\Omega)$, et $[C] \in V$ un point général. Dans les notations introduites ci-dessus, on pose*

$$D = \sum_{1 \leq j \leq \alpha_i} i q_{i,j} + \sum_{1 \leq j \leq \beta_i} (i-1) r_{i,j}.$$

(1.11.0) *Si $-K_S \cdot C_i - \deg \phi_*D|_{C_i} \geq 1$ pour toute composante irréductible C_i de C , alors*

$$\dim V = -(K_S + R) \cdot \xi + g - 1 + |\beta|.$$

(1.11.1) *Si $-K_S \cdot C_i - \deg \phi_*D|_{C_i} \geq 2$ pour toute composante irréductible C_i de C , alors*

- (a^b) *la courbe C est immergée, sauf éventuellement aux points $r_{i,j}$;*
- (b) *les points $q_{i,j}$ et $r_{i,j}$ de \bar{C} sont deux à deux distincts;*
- (c^b) *aucun des points $s_{i,j} := \phi(r_{i,j})$ n'appartient à Ω ;*
- (d) *pour toute courbe $G \subseteq S$ et tout ensemble fini $\Gamma \subseteq S$ généraux tels que $(G \cup \Gamma) \cap \Omega = \emptyset$, C intersecte G transversalement et ne passe pas par Γ .*

- (1.11.2) Si $-K_S \cdot C_i - \deg \phi_* D|_{C_i} \geq 3$ pour toute composante irréductible C_i de C , alors
 (a^b) la courbe C est immergée ;
 (c) les points $p_{i,j}$ et $s_{i,j} = \phi(r_{i,j})$ sur C sont deux à deux distincts ;
 (e) la courbe C est lisse à chacun de ses points d'intersection avec R .
- (1.11.3) Si $-K_S \cdot C_i - \deg \phi_* D|_{C_i} \geq 4$ pour toute composante irréductible C_i de C , alors
 (a) la courbe C est nodale.

Cet énoncé est un ingrédient essentiel d'un travail en cours, avec Ciliberto, Galati et Knutsen dans lequel nous démontrons que les variétés de Severi des surfaces d'Enriques sont non-vides, voir section 1.5.

(1.12) Perspectives. Zahariuc [Zah19] a récemment démontré l'irréductibilité des variétés de Severi logarithmiques de la paire (\mathbf{P}^2, D) où D est une droite, qui sont celles considérées dans [CH98a], en procédant par dégénérescence et en utilisant la théorie de Jun Li [Li02]. J'ai peu de doutes que la même stratégie fonctionnera pour les paires (\mathbf{F}_n, E) où \mathbf{F}_n est une surface de Hirzebruch et E la section d'auto-intersection négative, étant donné le parallélisme entre les articles [Vak00] et [CH98a]. Ce projet n'est pas forcément très excitant mais pourrait éventuellement faire partie d'un sujet de thèse.

*Mais tu dis [Mais tu dis]
 Que le bonheur est irréductible
 Et je dis [Et il dit]
 Que ton espoir n'est pas si désespéré
 À condition d'analyser
 Que l'absolu ne doit pas être annihilé
 Par l'illusoire précarité
 De nos amours destitués
 Et vice versa [Et vice versa]*

Tranxen 200 (Les inconnus), *Et vice versa*

1.3 – Irréductibilité pour les variétés de Severi des surfaces $K3$

La question de l'irréductibilité des variétés de Severi est en général l'une des plus difficiles. Avec Ciro Ciliberto nous avons tiré parti du contrôle sur la géométrie locale des variétés de Severi nodales donné par la théorie des déformations telle qu'exposée dans [3] pour démontrer le résultat ci-dessous. Je dresse au début de la section 1.4 un rapide panorama des autres résultats connus dans cette direction.

(1.13) Théorème [6]. *Soit S une surface $K3$ telle que $\text{Pic}(S) = \mathbf{Z}L$, où L est ample et tel que $L^2 = 2p - 2$ pour un entier $p \geq 11$. Pour tout $\delta \in \mathbf{N}$ tel que $4\delta - 3 \leq p$, la variété de Severi nodale $V^{L,\delta}$ est irréductible.*

Notre stratégie repose sur le fait que sous les hypothèses faites sur (S, L) et p , la surface S dans son plongement induit par $|L|$ n'est pas faiblement déficiente, d'après la classification des surfaces faiblement déficientes par Chiantini et Ciliberto [CC02, Thm. 1.3] (sous les hypothèses du théorème, L est automatiquement très ample). Par [CC02, Thm. 1.4] ceci implique que lorsque $3\delta \leq p$, pour δ points généraux $p_1, \dots, p_\delta \in S$, le sous-système linéaire de $|L|$ constitué des diviseurs singuliers en p_1, \dots, p_δ a la codimension attendue 3δ dans $|L|$, et un membre général de ce sous-système est une courbe δ -nodale. Ces résultats sont énoncés à la section 5.2.

Dans ces conditions, il existe ainsi une composante irréductible distinguée de la variété de Severi $V^{L,\delta}$ qui est birationnelle à un fibré projectif au dessus du produit symétrique $S^{(\delta)}$, que nous appelons la *composante standard*. Si V est une autre composante de $V^{L,\delta}$, alors les nœuds des courbes paramétrées par V balaient un lieu de codimension $h_V > 0$ dans $S^{(\delta)}$. Dans ces conditions, nous avons observé que pour $[C] \in V$ les nœuds de C définissent une série linéaire de type $g_{2\delta}^h$ sur la normalisation \bar{C} : ceci est une simple conséquence de l'égalité

$$h^0(\bar{C}, \omega_{\bar{C}}(-\bar{\Delta})) = h^0(S, L \otimes \mathcal{I}_{\Delta}^2) - 1,$$

où $\Delta = p_1 + \dots + p_\delta$ désigne l'union des nœuds de C , $\bar{\Delta}$ sa pré-image dans la normalisation \bar{C} , et \mathcal{I}_{Δ} le faisceau d'idéaux définissant Δ dans S .

Sous des hypothèses opportunes, l'existence d'une telle série $g_{2\delta}^h$ sur la courbe normalisée \bar{C} est interdite par des résultats de Ciliberto–Knutsen [CK14] et Knutsen–Lelli-Chiesa–Mongardi [KLM19] qui contrôlent la théorie de Brill–Noether des courbes nodales sur une surface $K3$. On obtient par exemple directement qu'il ne peut pas exister de composante non-standard de $V^{L,\delta}$ (ce qui implique son irréductibilité) dès que $5\delta - 3 \leq p$.

Pour obtenir une meilleure borne sur δ , nous démontrons par une analyse directe qu'en fait on a nécessairement $h_V > 2$. Pour donner une idée des arguments, supposons par l'absurde qu'il existe une composante V de $V^{L,\delta}$ telle que $h_V = 1$. Alors l'intersection des adhérences de V et de la composante standard aurait une composante irréductible W de codimension $\delta + 1$ dans $|L|$, paramétrant des courbes irréductibles C_0 singulières au moins le long d'un sous-schéma Δ de longueur δ , de sorte que pour une famille de courbes $[C_t] \in V$ (resp. de courbes $[C_t]$ appartenant à la composante standard), le sous-schéma des nœuds de C_t tend vers Δ lorsque C_t tend vers C_0 . Le membre général de W a genre $p - \delta - 1$ ou $p - \delta$. Dans le premier cas, il s'agit d'une courbe $(\delta + 1)$ -nodale, mais alors la variété de Severi $V^{L,\delta}$ a un point $(\delta + 1)$ -uple ordinaire au point générique de W dont chaque branche locale correspond à la lissification indépendante d'un nœud parmi les $\delta + 1$, ce qui fait que V et la composante standard devraient nécessairement correspondre à la même branche locale, ce qui est absurde. Dans le second cas, on démontre que le membre général de W a nécessairement $\delta - 1$ nœuds et un cusp pour toutes singularités, ce qu'on exclut ensuite par des arguments similaires à ceux donnés dans le premier cas.

La preuve du fait qu'on ne peut pas avoir $h_V = 2$ suit un principe similaire, mais est techniquement plus élaborée (en particulier on utilise à nouveau la théorie des diviseurs généralisés de Hartshorne évoquée en section 1.2) ; c'est pour cette partie de la preuve qu'on utilise l'hypothèse $p \geq 11$. On obtiendrait une borne encore meilleure en montrant que h_V doit être encore plus grand, ce pourquoi la principale difficulté semble être la complexité croissante de l'analyse à mener.

Plusieurs années auparavant, nous avons démontré avec Ciro Ciliberto l'irréductibilité dans le cas $p = 3$ et $\delta = 2$ (pour $\delta = 1$ l'irréductibilité vaut toujours pour, et pour $\delta = p$ elle ne vaut jamais), en considérant la dégénérescence de surfaces quartiques de \mathbf{P}^3 vers la surface de Kummer d'un produit de courbes elliptiques.

(1.14) Proposition [2, Thm. 9.2]. *Pour S une quartique générale de \mathbf{P}^3 , la courbe $V^{\mathcal{O}(1),2}$ est irréductible.*

(1.15) Autres surfaces à dimension de Kodaira nulle. Zahariuc [Zah] a identifié toutes les composantes irréductibles des variétés de Severi d'une surface abélienne A relativement à une polarisation primitive, c.-à-d. de type $(1, d)$. Chaque composante est caractérisée par une propriété de factorisation à travers une isogénie ; autrement dit la structure des surfaces abéliennes impose l'existence de plusieurs composantes irréductibles, mais en dehors de ce phénomène les

variétés de Severi sont irréductibles, ainsi elles ne sont pas pathologiques du point de vue de l'irréductibilité.

La situation pour les surfaces bi-elliptiques n'a à ma connaissance pas été étudiée, et il me semble que c'est une entreprise plausible.

Pour les surfaces d'Enriques, je renvoie à la section 1.5.

1.4 – Applications de la positivité des fibrés en droites

Dans cette section, j'explique comment certaines propriétés de positivité introduites par Beltrametti et Sommese (et Francia pour la seconde) permettent de répondre à la plupart des questions posées à propos des variétés de Severi (p. 6), lorsque le nombre de nœuds n'est pas trop grand par rapport au genre arithmétique. J'ai fait quelques remarques en ce sens dans la note [10].

Un sous-schéma Z d'une variété X est dit *curvilinéaire* s'il est de dimension 0, et pour tout point $x \in Z_{\text{red}}$ l'espace tangent de Z en x a dimension au plus 1.

(1.16) Définition. *Soit X une variété algébrique lisse, et L un fibré en droites sur X . Soit $k \geq 0$ entier. On dit que L est k -très ample (resp. k -globalement engendré) si pour tout sous-schéma $Z \subseteq X$ de dimension 0 (resp. curvilinéaire) et de longueur $k + 1$, l'application de restriction*

$$H^0(X, L) \rightarrow H^0(Z, L|_Z)$$

est surjective.

Longtemps avant l'article [6], il avait été prouvé par Keilen [Kei03] que pour toute surface $K3$, (S, L) , primitivement polarisée de genre p et telle que $\text{Pic}(S) = \mathbf{Z}L$, et pour tout entier $k \geq 1$, les variétés de Severi $V^{kL, \delta}$ sont irréductibles si

$$\delta < \frac{6(2p-2)+8}{(11(2p-2)+12)^2} \cdot k^2 \cdot (2p-2)^2 \quad \left(\sim_{p \rightarrow \infty} \frac{12}{121} \cdot k^2 \cdot p \right).$$

À ma connaissance, ce résultat est le meilleur à l'heure actuelle pour k grand. Notre résultat avec Ciliberto (Théorème (1.13)) vaut seulement pour $k = 1$, à cause de l'utilisation des résultats de [CK14, KLM19].

Plus récemment (mais toujours avant [6]), Kemeny [Kem15] a démontré que l'inégalité $\delta \leq \frac{1}{6}(2+k(p-1))$ est suffisante pour l'irréductibilité de $V^{kL, \delta}$. Sa preuve est basée sur l'observation que pour toute surface polarisée (S, L) , la variété de Severi $V^{L, \delta}$ est en quelque sorte trivialement irréductible si L est $(3\delta - 1)$ -très ample : en effet dans ce cas pour tous $p_1, \dots, p_\delta \in S$ deux à deux distincts (et pas seulement pour un choix général¹²), les membres de $|L|$ singuliers en p_1, \dots, p_δ forment un sous-système linéaire de codimension δ . On obtient alors la borne indiquée en utilisant le critère de Knutsen [Knu01] pour la k -très amplitude des fibrés en droites sur une surface $K3$ rappelé ci-dessous (Théorème (1.20)).

Ensuite, après notre article [6] avec Ciliberto, Ballico [Bal19] a démontré que si L est seulement très ample et $(2\delta - 1)$ -globalement engendré alors la variété de Severi nodale $V^{L, \delta}$ est irréductible et de la dimension attendue à moins qu'elle ne soit vide. Le résultat au cœur de son approche est le suivant.

¹². on retrouve cet argument dans la preuve du théorème (3.57)

(1.17) Proposition [Bal19]. *Soit L un fibré en droites sur une surface lisse. Si L est très ample et $(2\delta - 1)$ -globalement engendré, alors le lieu $\Sigma_\delta(L)$ de tous les membres de $|L|$ qui sont singuliers en (au moins) δ points est irréductible de codimension δ dans $|L|$.*

L'ingrédient qui permet à Ballico de remplacer la condition d'être $(3\delta - 1)$ -très ample par celle d'être $(2\delta - 1)$ -globalement engendré est le "lemme curvilinéaire", issu de la théorie de l'interpolation : essentiellement c'est la remarque que si δ plans tangents à la surface S dans son plongement induit par $|L|$, disons $\mathbf{T}_{p_1}, \dots, \mathbf{T}_{p_\delta}$, engendrent un espace de dimension plus petite qu'attendu, alors nécessairement il existe des points q_1, \dots, q_δ dans les plans $\mathbf{T}_{p_1}, \dots, \mathbf{T}_{p_\delta}$ respectivement, tels que les droites $\langle p_1, q_1 \rangle, \dots, \langle p_\delta, q_\delta \rangle$ engendrent un espace de dimension plus petite qu'attendu.

Dans [10] j'ai observé qu'on peut améliorer le résultat principal de Ballico en appliquant conjointement l'énoncé ci-dessous dû à Kool–Shende–Thomas. La preuve de ce dernier énoncé est donnée en détail dans les notes [TV.13] que j'ai écrites avec Francesco Bastianelli ; elle est basée sur la théorie des déformations des courbes singulières comme dans la section 1.2,

(1.18) Proposition [KST11]. *Soit L un fibré en droites sur une surface lisse. Si L est δ -très ample, alors un sous-système linéaire $\mathfrak{L} \subseteq |L|$ de dimension δ général contient seulement un nombre fini de courbes δ -nodales, et tous ses autres membres sont des courbes réduites de genre géométrique $p_g > p(L) - \delta$.*

Dans le cas où S est une surface K3, abélienne, ou d'Enriques, ceci m'a permis de démontrer le résultat suivant sur les variétés de Severi équivariante, en utilisant en plus le fait qu'on connaît dans tous ces cas les dimensions des variétés de Severi équivariantes, voir les sections 1.2 et 1.5.

(1.19) Théorème [10]. *Soit S une surface K3 (resp. abélienne, resp. d'Enriques), et L un fibré en droites sur S . Soit $g \leq p(L)$ un entier. Si L est très ample et $(2p(L) - 2g - 1)$ -globalement engendré, alors la variété de Severi équivariante $V_g(L)$ est non vide et irréductible, de dimension g (resp. $g-2$, resp. $g-1$), et le membre général de $V_g(L)$ est une courbe $(p(L) - g)$ -nodale.*

À part les surfaces bielliptiques, toutes les surfaces minimales de dimension de Kodaira nulle sont de l'un des trois types considérés dans le théorème. Il serait intéressant d'étudier le dernier cas manquant (les bielliptiques).

Pour obtenir des conditions explicites, on utilise le résultat suivant de Knutsen.

(1.20) Théorème [Knu01]. *Soit L un fibré en droites big \mathcal{E} nef sur une surface K3. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) L est k -globalement engendré ;
- (ii) L est k -très ample ;
- (iii) $L^2 \geq 4k$ et pour tout D effectif la condition suivante est fausse :

$$2D^2 \stackrel{(*)}{\leq} L \cdot D \leq D^2 + k + 1 \stackrel{(**)}{\leq} 2k + 2$$

où $(*)$ est une égalité ssi $L \sim 2D$ et $L^2 \leq 4k + 4$

et $(**)$ est une égalité ssi $L \sim 2D$ et $L^2 = 4k + 4$.

Knutsen donne également un critère similaire pour les fibrés en droites sur les surfaces d'Enriques.

(1.21) Corollaire. Soit S une surface $K3$ telle que $\text{Pic}(S) = \mathbf{Z}.L_1$ avec $L_1^2 = 2p - 2$.

1) L_1 est k -très ample si et seulement si $k \leq \frac{1}{2}(p - 1)$.

2) Pour $m > 1$, mL_1 est k -très ample si et seulement si $k + 1 < (m - 1)(2p - 2)$.

Dans le cas d'une surface $K3$ à groupe de Picard engendré par L , le résultat d'irréductibilité obtenu en conjuguant (1.19) et (1.21) est un tout petit peu moins bon que le Théorème (1.13), mais le gros avantage du résultat de Ballico est qu'il s'applique même si L n'est pas primitif dans le groupe de Picard.

1.5 – Variétés de Severi des surfaces d'Enriques

Dans le court article [7], nous étudions avec Ciro Ciliberto, Concettina Galati et Andreas L. Knutsen la régularité des variétés de Severi des surfaces d'Enriques (voir question 2, p. 6). Soit S une surface d'Enriques lisse, et $C \subseteq S$ une courbe intègre. La classe canonique K_S est de 2-torsion dans $\text{Pic}(S)$ et définit un revêtement double étale

$$\pi : S' \xrightarrow{2:1} S$$

où S' est une surface $K3$. C'est le tiré-en-arrière

$$\eta_{\bar{C}} = \nu^* K_S|_C \in \text{Pic}^0(\bar{C})$$

de cette classe à la normalisation \bar{C} de C qui va déterminer les propriétés de la variété de Severi au point $[C]$ (comme d'habitude, on note $\nu : \bar{C} \rightarrow C$ la normalisation).

Si $C \subseteq S$ est une courbe de genre g dans une surface $K3$, il y a une discordance entre les dimensions attendues de la variété de Severi du point de vue respectivement des théories des déformations cartésienne et paramétrique. La première est celle qui compte pour la régularité de la variété de Severi, et prédit que V_g^L a codimension $\delta = p_a(L) - g$ dans $|L|$; la seconde voit C comme le morphisme $\phi : \bar{C} \rightarrow S$, lui adjoint le fibré normal $N_\phi \cong \omega_{\bar{C}} \otimes \phi^* \omega_S^{-1} = \omega_{\bar{C}}$, et prédit que V_g^L a dimension

$$\chi(N_\phi) = g - 1 = \dim(|L|) - \delta - 1.$$

Comme on l'a déjà mentionné à la section 1.2 (et utilisé à plusieurs reprises là-bas et ailleurs), la bonne prédiction est celle de la théorie cartésienne, et la différence s'explique par l'existence de déformations non algébriques de S ; l'espace d'obstructions $H^1(\bar{C}, \omega_{\bar{C}})$ est non nul mais les obstructions sont triviales malgré tout. Des considérations analogues valent quand S est une surface abélienne (la seule différence est que C a des déformations qui changent sa classe d'équivalence linéaire, mais celles-ci correspondent aux translations dans S).

Si maintenant $C \subseteq S$ est une courbe dans une surface d'Enriques, alors $N_\phi \cong \omega_{\bar{C}} \otimes \eta_{\bar{C}}$ et la dimension attendue par la théorie des déformations de ϕ est

$$\chi(\omega_{\bar{C}} \otimes \eta_{\bar{C}}) = g - 1 = \dim(|C|) - \delta$$

dans tous les cas, cependant l'espace d'obstructions $H^1(\bar{C}, \omega_{\bar{C}} \otimes \eta_{\bar{C}})$ est non nul si et seulement si $\eta_{\bar{C}} = 0$. D'autre part, toutes les déformations de S sont algébriques dans ce cas. Notre résultat ci-dessous dit en particulier que si C est irréductible et nodale, alors la dimension de la variété de Severi correspondante est

$$h^0(\bar{C}, \omega_{\bar{C}} \otimes \eta_{\bar{C}}) = \begin{cases} g - 1 & \text{si } \eta_{\bar{C}} \neq 0 \\ g & \text{si } \eta_{\bar{C}} = 0, \end{cases}$$

et donc les déformations du morphisme $\phi : \bar{C} \rightarrow S$ ne sont jamais obstruées.

(1.22) Théorème [7]. Soit S une surface d'Enriques, et $L \in \text{Pic}(S)$ tel que $L^2 = 2p - 2 > 0$ et $|L|$ contient des courbes lisses. Appelons $\pi : S' \rightarrow S$ le revêtement double étale de S par une surface $K3$ défini par K_S . Pour tout entier δ la variété de Severi nodale $V^{L,\delta}$ est lisse, et toute composante irréductible $V \subseteq V^{L,\delta}$ a dimension $g - 1$ ou g . De plus :

(i) si $\dim(V) = g - 1$ et $[C] \in V$, alors $\pi^{-1}(C)$ est irréductible (et donc un membre de $V^{2\delta}(S', \pi^*L)$);

(ii) si $\dim(V) = g$ alors il existe un fibré inversible M sur S' avec $M \cdot i^*M = 2d$ (i étant l'involution sur S' associée au revêtement double) et $M^2 = 2(p - d) - 2$ pour un certain entier d vérifiant

$$\frac{p-1}{2} \leq d \leq \delta,$$

et tel que $\pi^*L = M \otimes i^*M$ de sorte que les membres de V sont images birationnelles par π des courbes de $V^{\delta-d}(S', M)$ qui rencontrent transversalement leur image par i .

Si $M \cong i^*M$ (ce qui est nécessairement le cas si S est générale), alors nécessairement $d = \frac{p-1}{2}$ et $L \sim 2L_1$ pour un certain $L_1 \in \text{Pic}(S)$ avec $(L_1)^2 = d$.

Le phénomène à l'œuvre derrière ce comportement est le fait, déjà observé par Tannenbaum [Tan82], que si $C' \subseteq S'$ est une courbe nodale réductible dans une surface $K3$, alors les nœuds de C' imposent des conditions non-indépendantes¹³ au système linéaire $|C'|$; ainsi les déformations de C' comme courbe nodale dans S' forment un lieu de codimension strictement plus petite que δ dans $|C'|$, où δ est le nombre de nœuds.

(1.23) Exemples. Soit $S' \subseteq \mathbf{P}^3$ une quartique lisse contenant une droite C_0 , et $C' = C_0 + C_1$ une section générale de S' par un hyperplan contenant C_0 . La courbe C' a 3 nœuds, ses déformations 3-nodales forment un pinceau dans l'espace $|C'|$ de dimension 3, et sont toutes réductibles.

Soit $S' \subseteq \mathbf{P}^3$ une quartique lisse, et $C' = C_1 + C_2$ une section générale de S' par une quadrique somme de deux plans. La courbe C' a 4 nœuds, ses déformations 4-nodales sont toutes réductibles, et décrivent un lieu de dimension 6 dans l'espace $|C'|$ de dimension 9.

Comme on le voit dans les exemples ci-dessus, le point-clef est que les déformations d'une courbe réductible nodale dans une surface $K3$ telles que le nombre de nœuds reste constant sont toutes réductibles. Ceci s'explique par le fait que la dimension de la variété de Severi équilibrée V_g^L est g , indépendante de L , ce qui est caractéristique des surfaces à fibré canonique numériquement trivial. Dans le cas du plan projectif par exemple, ce phénomène ne se produit pas : la dimension de la variété de Severi V_g^{dH} est $3d + g - 1$ (H étant la classe d'une droite), et dépend non-trivialement de d ; ceci force l'existence de déformations irréductibles d'une courbe nodale réductible.

Revenant au théorème (1.22), le point essentiel de la preuve est de distinguer quand est-ce que la courbe $\pi^{-1}(C)$ est réductible ou irréductible. Notons $\eta_C = K_S|_C \in \text{Pic}^0(C)$; c'est une classe de 2-torsion qui est toujours non-triviale si C est big & nef. On a $\eta_{\bar{C}} = \nu^*\eta_C$ dans la notation introduite au début de la section.

$$\begin{array}{ccc} (\pi^{-1}C) \times_C \bar{C} & \longrightarrow & \bar{C} \\ \downarrow & & \downarrow \nu \\ \pi^{-1}C & \xrightarrow{\pi|_{\pi^{-1}C}} & C, \end{array}$$

13. il serait plus léger de dire "dépendantes", mais être lourd permet d'insister sur le sens des mots.

où les deux flèches horizontales sont les revêtements doubles étales de C et \bar{C} définis par η_C et $\eta_{\bar{C}}$ respectivement. La dichotomie est la suivante (voir figures 1.1 et 1.2 ci-dessous) :

- ou bien $\eta_{\bar{C}} \neq 0$, et $\pi^{-1}(C)$ est irréductible ;
- ou bien $\eta_{\bar{C}} = 0$, et $\pi^{-1}(C)$ a deux composantes irréductibles échangées par l'involution associée à $\pi : S' \rightarrow S$, qui ne sont *pas* isomorphes à C puisque $\eta_C \neq 0$.

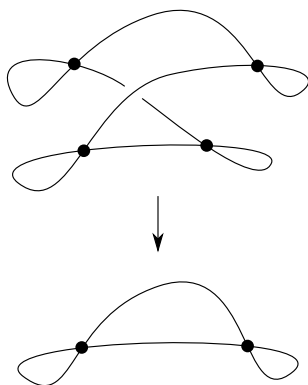


Figure 1.1: $\eta_{\bar{C}} \neq 0$

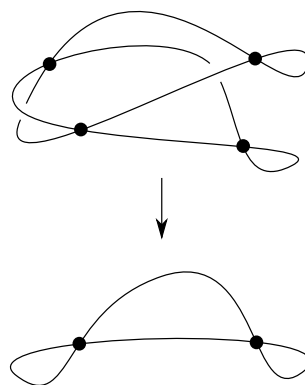


Figure 1.2: $\eta_{\bar{C}} = 0$

Une fois ceci compris, le reste de la preuve suit naturellement.

Il faut prendre garde au fait que le théorème (1.22) ci-dessus ne dit rien sur la vacuité ou non de la variété de Severi $V^{L,\delta}$, qui est un problème beaucoup plus difficile. C'est l'objet d'un travail en cours¹⁴ avec les mêmes auteurs, dans lequel nous démontrons l'existence d'une composante régulière (cas (i) du théorème (1.22)) de la variété de Severi $V^{L,\delta}$ pour tout L big & nef non 2-divisible dans $\text{NS}(S)/\text{torsion}$ (voir section 3.2 pour comprendre cette condition) et tout $0 \leq \delta \leq g - 1$. La stratégie de notre preuve est de construire des courbes de genre 1 (le plus petit possible sur une surface d'Enriques) donnant des points réguliers de la variété de Severi, en considérant des dégénérescences vers des surfaces réglées $\text{Sym}^2(E)$, E une courbe elliptique, puis à utiliser le fait que par régularité on peut lisser indépendamment les nœuds.

14. note *a posteriori* : désormais disponible en prépublication, arXiv:2109.10735.

2 – Courbes rationnelles et classification

Depuis les travaux fondamentaux de Mori dans les années 80 et le développement du “Minimal Modèle Programme du”¹⁵ (MMP), l’importance de l’étude des familles de courbes rationnelles existant sur une variété X donnée pour comprendre la géométrie de X est communément admise. En particulier pour les variétés uniréglées, les familles de courbes rationnelles *minimales*¹⁶ constituent une donnée fondamentale; une incarnation importante de cette donnée est la VMRT¹⁷ associée, qui est l’ensemble dans la variété cotangente $\mathbf{P}(\Omega_X)$ des directions tangentes aux courbes de la famille minimale considérée.

Les variétés lisses uniréglées sont celles dont le diviseur canonique n’est pas pseudo-effectif, d’après un célèbre résultat de Boucksom–Demailly–Păun–Peternell, et il est conjecturé que ce sont exactement les variétés dont la dimension de Kodaira est $-\infty$. En particulier les variétés de Fano sont uniréglées, en fait elles sont mêmes rationnellement connexes comme l’ont démontré indépendamment Campana et Kollár–Miyaoaka–Mori. Les variétés dont il est question dans ce chapitre ont un fibré canonique négatif en un certain sens, et sont donc fondamentalement différentes des variétés à fibré canonique trivial ou numériquement trivial dont il a été beaucoup question jusqu’à présent.

Dans ce chapitre je présente un résultat de classification des variétés de Fano (Théorème (2.2)) obtenu en collaboration avec Andreas Höring. Utilisé conjointement à d’autres résultats dûs à Cho–Miyaoaka–Shepherd-Barron, Kebekus, et Höring–Novelli, il donne un résultat de classification des variétés uniréglées (Corollaire (2.3)).

Soit X une variété projective lisse. On définit sa *longueur* comme l’entier (éventuellement $-\infty$)

$$\ell(X) = \min\{(-K_X \cdot C) : C \subseteq X \text{ courbe rationnelle}\}.$$

Il résulte du lemme *bend and break* de Mori que la longueur est au plus $n + 1$, $n = \dim(X)$: en effet si $C \subseteq X$ est une courbe rationnelle telle que $-K_X \cdot C > n + 1$, alors elle se déforme non-trivialement à deux points fixés, et donc le lemme de Mori dit qu’il existe une dégénérescence de C comme somme de courbes rationnelles C' telles que $-K_X \cdot C' < -K_X \cdot C$.

Il a été démontré par Cho–Miyaoaka–Shepherd-Barron [CMSB02] et Kebekus [Keb02b, Keb02a] que l’espace projectif est l’unique variété de longueur maximale, autrement dit $\ell(X) = n + 1$ si et seulement si $X \cong \mathbf{P}^n$. Ce résultat, conjecturé par Mori et Mukai, généralise à la fois le théorème de Kobayashi–Ochiai ci-dessous (partie (i)), et le célèbre théorème de Mori suivant une conjecture de Hartshorne disant que l’espace projectif est la seule variété projective lisse dont le fibré tangent est ample.

(2.1) Théorème [KO73]. *Soit X une variété de Fano lisse, et soit i le plus grand entier tel que $-K_X \sim iH$ avec H un diviseur ample. On a $i \leq n + 1$, $n = \dim(X)$ et*

(i) $i = n + 1$ si et seulement si $X \cong \mathbf{P}^n$;

(ii) $i = n$ si et seulement si $X \cong \mathbf{Q}^n$, une quadrique lisse¹⁸.

Le résultat que nous avons démontré avec Andreas Höring généralise la partie (ii). La caractérisation de \mathbf{P}^n et \mathbf{Q}^n en termes de longueur est numérique, et donc plus facile à vérifier que le critère de Kobayashi–Ochiai qui est plus restrictif.

15. en français, Programme du Modèle Minimal bien sûr ; dans le texte je suis l’ordre des mots de nos bretons cousins pour retrouver l’acronyme auquel nous sommes tous habitués.

16. disons dans un premier temps que ce sont les familles couvrantes de degré minimal par rapport à une polarisation donnée.

17. Variété des Minimales Rationnelles Tangentes, dans le désordre toujours, mais les blagues les meilleures sont les plus courtes — dit-on.

18. La notation \mathbf{Q}^n désigne une hypersurface quadrique lisse de \mathbf{P}^{n+1} arbitraire, ce qui est sans ambiguïté puisque toutes ces hypersurfaces lisses sont isomorphes et incarnent la variété homogène SO_n/P_1 .

(2.2) Théorème [4]. *Soit X une variété de Fano lisse de dimension n telle que $\ell(X) = n$. Alors X est une quadrique lisse \mathbf{Q}^n .*

Ce résultat avait été annoncé auparavant par Miyaoka [Miy04], mais la preuve donnée dans cet article est incomplète (comme nous l'avons explicité avec H\"oring, voir [4, Rmk. 5.2]) et présente un certain nombre de points délicats. Une version un peu plus faible avait ensuite été démontrée par Hwang [Hwa13]. Notre preuve reprend des idées et techniques de l'article de Miyaoka, mais repose sur une stratégie différente.

En mettant ensemble le Théorème (2.2), son prédécesseur pour la longueur $n + 1$ dû à Cho–Miyaoka–Shepherd-Barron et Kebekus, et un résultat de H\"oring–Novelli [HN13], on obtient le résultat suivant.

(2.3) Corollaire. *Soit X une variété projective lisse telle que $\ell(X) \geq n$. Alors X est ou bien un espace projectif, ou bien une quadrique, ou bien un fibré projectif sur une courbe.*

(2.4) La preuve de ce corollaire nécessite l'inégalité de Ionescu–Wiśniewski [Ion86, Wiś91], qui met en jeu une notion de longueur pour les rayons extrémaux. Soit X une variété projective lisse, et R un rayon extrémal de X , c.-à-d. un rayon extrémal du cône $\overline{\text{NE}}(X) \subseteq N_1(X)$ engendré par les 1-cycles effectifs, qu'on suppose en outre K_X -négatif, c'est-à-dire tel que $K_X \cdot C < 0$ pour toute classe numérique C appartenant à R . D'après les travaux de Kawamata il existe alors une contraction de R , c'est-à-dire un morphisme surjectif $c_R : X \rightarrow Y$ qui contracte précisément les courbes dont la classe numérique appartient à R ; on appelle *lieu* de R la réunion de toutes ces courbes, et on le note $\text{lieu}(R)$. La *longueur* du rayon extrémal R est

$$\ell(R) = \min\{-K_X \cdot C : C \subseteq X \text{ courbe rationnelle t.q. } [C] \in R\}$$

(j'utilise la même notation que pour la longueur d'une variété, estimant qu'il n'y aura pas de risque de confusion). L'inégalité de Ionescu–Wiśniewski est la suivante : pour tout F composante de dimension strictement positive d'une fibre de la contraction c_R , on a

$$(2.4.1) \quad \dim(F) + \dim(\text{lieu}(R)) \geq \dim(X) + \ell(R) - 1.$$

(2.5) Preuve du corollaire (2.3). Puisque la variété lisse X est de longueur au moins n , $n = \dim(X)$, d'après le théorème du cône elle possède un rayon extrémal R de longueur au moins n . Soit F une composante irréductible de dimension strictement positive d'une fibre de la contraction c_R . Puisque F est contenue dans le lieu de R , et $\ell(R) \geq n$, l'inégalité (2.4.1) implique

$$\text{lieu}(R) = X \quad \text{et} \quad \dim(F) \geq \ell(R) - 1.$$

Au passage remarquons que le fait que le lieu de R soit X tout entière prouve que X est uniréglée.

Puisque $\ell(R) \geq n$, F est soit X tout entière soit un diviseur.

(a) Si $\dim(F) = n$ alors c_R contracte X sur un point, donc le nombre de Picard $\rho(X)$ est 1, et $-K_X$ est ample (il suffit de tester la positivité de son intersection avec une seule courbe, et par hypothèse il existe des courbes rationnelles C telles que $-K_X \cdot C \geq n$). On est alors sous les hypothèses du théorème de Cho–Miyaoka–Shepherd-Barron et Kebekus ou du théorème (2.2), en conséquence de quoi X est ou bien \mathbf{P}^n ou bien \mathbf{Q}^n .

(b) Si $\dim(F) = n - 1$ alors on a nécessairement $\dim(F) = \ell(R) = n - 1$, auquel cas le théorème principal de [HN13] s'applique et dit que la contraction c_R munit X d'une structure de fibré en \mathbf{P}^{n-1} sur une courbe. \square

(2.6) Le même genre d'argument permet de démontrer que, sous les hypothèses du théorème (2.2), si $n \geq 3$ alors X a nécessairement nombre de Picard 1. En effet, pour X Fano avec $\rho(X) > 1$ il existe au moins deux rayons extrémaux R_1 et R_2 , et les contractions associées c_1 et c_2 sont toutes les deux des fibrations sur des courbes comme on l'a vu ci-dessus en (2.5). Soit D_1 une fibre de c_1 . C'est un diviseur, de dimension $n - 1 \geq 2$ si $n \geq 3$. Il contient donc nécessairement une courbe contractée par c_2 , ce qui contredit le fait que toutes les courbes contractées par c_1 ont leur classe numérique dans le rayon R_1 . \square

Je vais à présent donner les ingrédients essentiels de la preuve du théorème (2.2).

(2.7) Courbes rationnelles minimales. Une famille de courbes rationnelles minimales est une composante irréductible \mathcal{K} de $\text{RatCurves}^n(X)$ satisfaisant aux deux propriétés suivantes ($\text{RatCurves}^n(X)$ est la réunion des normalisations (d'où l'exposant 'n') des sous-ensembles localement fermés dans la variété de Chow de X qui paramètrent des courbes rationnelles *irréductibles*) :

- (i) les courbes paramétrées par \mathcal{K} dominant X ; et
- (ii) pour $x \in X$ général, l'ensemble algébrique $\mathcal{K}_x^b \subseteq \mathcal{K}$ paramétrant les courbes passant par x est propre (on réserve la notation \mathcal{K}_x pour la normalisation de \mathcal{K}_x^b).

Une famille de courbes rationnelles vérifiant seulement la propriété (ii) est dite *localement non-scindée*. Concrètement, cette propriété se traduit par le fait que les déformations à un point (général) fixé des courbes de \mathcal{K} ne dégèrent pas en une courbe non-intègre. Une variété lisse X uniréglée possède des familles de courbes rationnelles minimales, il suffit de prendre une famille de courbes rationnelles dominant X et de degré minimal pour cette propriété par rapport à une polarisation arbitraire (pour une variété de Fano, on pourra choisir l'anticanonique).

Soit C un membre général d'une famille de courbes rationnelles minimales \mathcal{K} , vu comme un morphisme $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$. On a

$$(2.7.1) \quad f^*T_X = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)^{\ell-2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}^{n-\ell+1},$$

où $\ell = -K_X \cdot C$, voir par exemple [Deb01, Exercice 4.8.3]. On en déduit que pour un point $x \in X$ général, la famille \mathcal{K}_x des courbes de \mathcal{K} passant par x a dimension

$$(2.7.2) \quad \dim(\mathcal{K}_x) = \ell - 2$$

(on trouve ℓ pour les déformations du morphisme $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$ à un point fixé, mais il faut soustraire les automorphismes de \mathbf{P}^1 laissant ce point fixe).

(2.8) Variété des tangentes rationnelles minimales (VMRT). Soit \mathcal{K} une famille de courbes rationnelles minimales sur une variété lisse X (en particulier X est uniréglée). Kebekus [Keb02b] a démontré que pour un point $x \in X$ général :

- (i) tous les membres de \mathcal{K}_x^b (la sous-famille de \mathcal{K} des courbes passant par x) qui sont singuliers en x sont immergés en x (autrement dit, voyant une telle courbe comme un morphisme $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$, la différentielle de f est injective en tout t tel que $f(t) = x$) ;
- (ii) l'application rationnelle $\tau_x^b : \mathcal{K}_x^b \dashrightarrow \mathbf{P}(T_{X,x})$ qui à une courbe associe sa direction tangente¹⁹ au point x induit une application régulière $\tau_x : \mathcal{K}_x \rightarrow \mathbf{P}(T_{X,x})$ sur la normalisation \mathcal{K}_x de \mathcal{K}_x^b , et τ_x est un morphisme fini.

L'image \mathcal{V}_x de l'application tangente τ_x est appelée *variété des tangentes rationnelles minimales* (VMRT) au point x (associée à la famille \mathcal{K}). D'après ce qui précède et (2.7.2), c'est

¹⁹ ici $\mathbf{P}(T_{X,x})$ désigne l'espace projectif des droites contenues dans l'espace vectoriel $T_{X,x}$; c'est une fibre du fibré projectif $\mathbf{P}(\Omega_X)$ défini comme $\text{Proj}(\text{Sym } \Omega_X)$. Ainsi je n'utilise pas la même notation pour les projectivisés des espaces vectoriels et des fibrés vectoriels. C'est mon choix ! désolé si ça engendre de la confusion.

une variété de dimension $\ell - 2$ plongée dans l'espace projectif $\mathbf{P}(T_{X,x})$ de dimension $n - 1$. La VMRT totale est la clôture de Zariski $\mathcal{V} \subseteq \mathbf{P}(\Omega_X)$ de la réunion des VMRT aux points x de X généraux.

La normalisation \mathcal{K}_x est lisse pour x général. D'autre part, Hwang et Mok ont démontré [HwM04] que l'application tangente τ_x est birationnelle. Ceci implique en particulier que la normalisation de \mathcal{V}_x est \mathcal{K}_x .

(2.9) Exemples. Si $\ell = n + 1$, la VMRT au point x est $\mathbf{P}(T_{X,x})$ tout entier. Si $\ell = n$, c'est une hypersurface de $\mathbf{P}(T_{X,x})$.

Si $X = \mathbf{P}^n$ ou \mathbf{Q}^n , les droites contenues dans X constituent l'unique famille de courbes rationnelles minimales. Pour $x \in X$ arbitraire, les droites passant par x balayent X tout entière si $X = \mathbf{P}^n$, et un cône sur une quadrique \mathbf{Q}^{n-2} si $X = \mathbf{Q}^n$.

Si $X \subseteq \mathbf{P}^{n+1}$ est une hypersurface de degré $d < n + 1$, les droites passant par un point lisse $x \in X$ forment un cône sur une intersection complète dans $\mathbf{P}(T_{X,x})$ d'hypersurfaces de degrés respectifs $2, \dots, d$: voir (4.21), ces hypersurfaces sont définies par les polaires $D^2 X(x), \dots, D^d X(x)$, la raison étant qu'une droite passant par x rencontre X avec multiplicité au moins $d + 1$ en x si et seulement si elle est contenue dans X (voir aussi [Deb, §2.3.2] pour une version de ce calcul sans le formalisme de la polarité). On en déduit que les familles de courbes rationnelles minimales sont constituées de droites, mais il n'est pas clair que la famille des droites contenues dans X soit irréductible ; c'est bien le cas cependant si X est une cubique de dimension au moins 3, voir [Deb, §2.5].

On connaît en outre les VMRT des variétés homogènes [LM03]. C'est une information que nous avons utilisée avec Ciro Ciliberto pour démontrer certaines propriétés des variétés de Mukai, voir (3.16).

(2.10) Caractérisation par la VMRT. Il existe une série de résultats, dûs notamment à Hwang et Mok, permettant d'identifier certaines variétés en fonction de leurs VMRT. Nous les utiliserons pour la conclusion de la preuve du théorème (2.2), c'est ici que l'hypothèse que X est Fano est nécessaire (on a également besoin de $\rho(X) = 1$, qui vaut comme on l'a vu en (2.6)).

La stratégie générale de la preuve est de démontrer que X possède une famille de courbes rationnelles minimales telle que la VMRT associée \mathcal{V}_x au point général $x \in X$ est une hypersurface de degré $d \leq 2$ dans $\mathbf{P}(T_{X,x})$.

Pour conclure on aura besoin de supposer $n \geq 3$, ce qui ne pose pas de problème puisque le théorème (2.2) est connu pour $n \leq 3$ par classification des variétés de Fano. Dans ce cas, si \mathcal{V}_x est une réunion d'hyperplans alors par [Hwa07, Thm. 1.5] (voir aussi [Ara06, Thm. 3.1]) X est un espace projectif, ce qui est exclu puisqu'on suppose $\ell(X) = n$. On en déduit que \mathcal{V}_x est nécessairement une quadrique irréductible, donc normale. D'autre part la normalisation de \mathcal{V}_x est lisse comme on l'a vu en (2.8), donc \mathcal{V}_x est une quadrique lisse. D'après [Mok08], ceci implique que $X \cong \mathbf{Q}^n$ comme il fallait démontrer.

Il reste donc à voir pourquoi la VMRT au point général a degré au plus 2. C'est une conséquence du calcul de la classe de cohomologie de la VMRT totale $\mathcal{V} \subseteq \mathbf{P}(\Omega_X)$, basé sur la construction suivante qui constitue le cœur de notre travail.

(2.11) Courbes binimales. Nous construisons une famille de courbes rationnelles dont le membre général $C \subseteq X$ a type de scindage

$$(2.11.1) \quad T_X|_C = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2)^n$$

dont les déformations à deux points fixés dominant X . Puisque le degré est deux fois le degré minimal $\ell(X) = n$, nous les baptisons familièrement *courbes binimales*. *A posteriori* ces courbes seront les coniques contenues dans \mathbf{Q}^n .

On commence par lisser la réunion $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ de deux courbes de la famille minimale \mathcal{K} qu'on s'est fixée et passant respectivement par deux points généraux de X (il s'agit de déformer un morphisme dont la source est une conique de rang 2 en des morphismes dont la source est une conique irréductible). Ceci donne une famille \mathcal{W} de courbes rationnelles irréductibles dominant X et de dimension $3n - 3$. On considère ensuite \mathcal{W}_{x_1, x_2} la normalisation d'une composante irréductible de la sous-famille de \mathcal{W} paramétrant les courbes passant par deux points ; la dimension de \mathcal{W}_{x_1, x_2} est $n - 1$.

On considère la famille universelle $q : \mathcal{U}_{x_1, x_2} \rightarrow \mathcal{W}_{x_1, x_2}$ et le morphisme d'évaluation associé

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_{x_1, x_2} & \xrightarrow{\text{ev}} & X \\ q \downarrow & & \\ \mathcal{W}_{x_1, x_2} & & \end{array}$$

Pour $i = 1, 2$, la pré-image $\text{ev}^{-1}(x_i)$ contient un unique diviseur σ_i dominant \mathcal{W}_{x_1, x_2} . Nous démontrons que la restriction du morphisme d'évaluation au complémentaire de $\sigma_1 \cup \sigma_2$ est quasi-finie. Pour cela, nous utilisons un analogue du lemme *bend and break* de Mori : le lemme de Mori est basé sur le fait qu'une surface géométriquement réglée possède au plus une section d'auto-intersection strictement négative, tandis que nous utilisons le résultat suivant.

(2.12) Lemme [Miy04, Prop. 2.4] (voir aussi [4, Lem. 3.4]). *Soit $f : S \rightarrow T$ un fibré en coniques possédant deux sections disjointes s_1 et s_2 toutes les deux contenues dans le lieu lisse de S , et telles que $s_1^2, s_2^2 < 0$. On suppose que toute fibre singulière de f est de la forme $F_1 + F_2$ avec $F_i \cap s_j = \delta_{ij}$. Soit s une section de f . On considère $\varepsilon : S' \rightarrow S$ la résolution minimale de S , et $s' \subseteq S'$ la transformée stricte de s .*

- (i) *Si $(s')^2 < 0$, alors $s' = s_1$ ou s_2 .*
- (ii) *Si $(s')^2 = 0$, alors s' est disjointe de s_1 et s_2 .*

On en déduit que l'application d'évaluation ci-dessus est dominante. En conséquence, un membre général de \mathcal{W} est une courbe 2-libre (voir [Deb01, Déf. 4.5]), ce qui implique qu'elle a le type de scindage annoncé en (2.11.1) et qu'elle est lisse. Ceci permet de relever la famille \mathcal{W} en une famille $\tilde{\mathcal{W}}$ de courbes rationnelles dans la variété cotangente $\mathbf{P}(\Omega_X)$. Le résultat suivant est la clef de voûte de notre calcul de la classe de cohomologie de la VMRT totale.

(2.13) Proposition. *Sous les hypothèses du théorème (2.2) et avec les notations ci-dessus, le nombre d'intersection entre le relèvement $[\tilde{C}] \in \tilde{\mathcal{W}}$ d'une courbe binimale et la VRMT totale $\mathcal{V} \subseteq \mathbf{P}(\Omega_X)$ est nul :*

$$\tilde{C} \cdot \mathcal{V} = 0.$$

La preuve de cette proposition est assez délicate et je l'ai jugée trop technique pour un rapport de synthèse, je renvoie donc à [4, §4.13].

Il est cependant instructif (pour ne pas dire rassurant) de vérifier directement sur la quadrique \mathbf{Q}^n cette propriété à première vue étonnante de séparation des tangentes. Dans ce cas les courbes minimales et binimales sont respectivement les droites et les coniques, et il s'agit de voir qu'une conique générale dans \mathbf{Q}^n n'est tangente à aucune droite. Une conique générale est une intersection complète $C = \Pi \cap \mathbf{Q}^n$ où Π est un 2-plan. Si L est une droite tangente à C ,

alors nécessairement $L \subseteq \Pi$ et donc $L \subseteq \Pi \cap \mathbf{Q}^n$ ce qui est impossible. (En revanche si C est une conique contenue dans un plan $\Pi \subseteq \mathbf{Q}^n$, alors en tout point $x \in C$ il existe une droite $L \subseteq \mathbf{Q}^n$ tangente à C , si bien que le relèvement \tilde{C} est une courbe contenue dans la VMRT totale \mathcal{V} ; pour une telle conique le type de scindage est différent de celui donné en (2.11.1)).

(2.14) Conclusion. Voyons enfin comment déduire de la proposition ci-dessus le résultat qui nous intéresse sur le degré de la VMRT au point général de X . Soit ζ la classe tautologique du fibré projectif $\pi : \mathbf{P}(\Omega_X) \rightarrow X$. La classe de la VMRT totale s'écrit

$$\mathcal{V} \sim d\zeta + b(-\frac{1}{n}\pi^*K_X),$$

où d est le degré de la VMRT \mathcal{V}_x au point général. Pour \tilde{C} le relèvement dans $\mathbf{P}(\Omega_X)$ d'une courbe binimale générale, on a $\tilde{C} \cdot \zeta = -2$ et $\tilde{C} \cdot \pi^*K_X = 2n$. La proposition (2.13) permet d'en déduire

$$(2.14.1) \quad \mathcal{V} \sim d(\zeta - \frac{1}{n}\pi^*K_X).$$

Enfin, on montre que $d \leq 2$ de la manière suivante. On considère le relèvement $\tilde{\mathcal{K}}$ dans $\mathbf{P}(\Omega_X)$ de notre famille \mathcal{K} de courbes rationnelles minimales de départ. On vérifie que c'est une composante irréductible de $\text{RatCurves}^n(\mathbf{P}(\Omega_X))$ en utilisant, pour $[\Gamma] \in \mathcal{K}$ générale et $\tilde{\Gamma}$ son relèvement dans la conormale, l'annulation de $H^0(\tilde{\Gamma}, T_{\mathbf{P}(\Omega_X)/X}|_{\tilde{\Gamma}})$ (donnée par le type de scindage (2.7.1) de Γ) et la suite exacte d'Euler relative pour comparer les dimensions de $\text{RatCurves}^n(\mathbf{P}(\Omega_X))$ et $\tilde{\mathcal{K}}$ au point $[\tilde{\Gamma}]$.

Puisque $\tilde{\mathcal{K}}$ est une composante irréductible de $\text{RatCurves}^n(\mathbf{P}(\Omega_X))$, on a l'estimation de dimension classique

$$(2.14.2) \quad \begin{aligned} \dim(\tilde{\mathcal{K}}) &\geq \chi(T_{\mathcal{V}}|_{\tilde{\Gamma}}) - 3 \\ &= 2n - 2 - K_{\mathcal{V}} \cdot \tilde{\Gamma} - 3, \end{aligned}$$

qu'on a déjà rencontrée sous de nombreuses formes au chapitre 1 (ici le “ -3 ” vient du fait qu'on estime la dimension de $\tilde{\mathcal{K}}$ comme espace de morphismes $\mathbf{P}^1 \rightarrow \mathcal{V}$ et qu'il faut donc tenir compte des automorphismes de la source); la dernière égalité est donnée par la formule de Riemann–Roch.

En utilisant la formule d'adjonction pour le diviseur $\mathcal{V} \subseteq \mathbf{P}(\Omega_X)$ et (2.14.1), on calcule

$$-K_{\mathcal{V}} \cdot \tilde{\Gamma} = d,$$

donc (2.14.2) donne l'inégalité voulue $d \leq 2$ puisque $\dim(\tilde{\mathcal{K}}) = \dim(\mathcal{K}) = 2n - 3$. Ceci achève la preuve du théorème (2.2).

Pour clore ce chapitre, j'énonce quelques problèmes encore ouverts qui se posent naturellement à la suite des résultats qu'on vient de discuter.

(2.15) Variétés de petites co-longueurs. On a vu que la longueur $\ell(X)$ d'une variété lisse X est au plus $n + 1$, $n = \dim(X)$, et que si X est une variété de Fano alors $\ell(X) = n + 1$ (resp. $\ell(X) = n$) si et seulement si $X \cong \mathbf{P}^n$ (resp. $X \cong \mathbf{Q}^n$). D'après le théorème de Kobayashi–Ochiai (2.1) ce sont respectivement les variétés de Fano d'indices $n + 1$ et n , l'indice i d'une variété de Fano étant défini comme le plus grand entier tel que $-K_X \sim iH$ avec H un diviseur ample. Il est naturel de se demander s'il est toujours vrai que la longueur d'une variété de Fano coïncide avec son indice.

Les variétés de Fano d'indice $n - 1$ ont été classifiées par Iskovskikh et Fujita, voir [IP99, §12.1]; en dimension 2 ce sont les surfaces de Del Pezzo, ces variétés sont donc communément appelées variétés de Del Pezzo en toute dimension. Les hypersurfaces cubiques lisses sont peut-être l'exemple le plus simple de variété de Del Pezzo. On a vu (exemples (2.9)) qu'en dimension $n \geq 3$ elles ont longueur $n - 1$ et leurs VMRT en un point général sont des intersections complètes de degrés 2 et 3 dans le projectivisé de l'espace tangent.

Les variétés de Fano d'indice $n - 2$ ont été classifiées par Mukai, voir [IP99, §5]. Elles jouent un rôle important dans le chapitre 3 puisque ce sont les variétés lisses qui dans un certain plongement ont des surfaces $K3$ comme sections linéaires. On verra certains exemples en (3.16), pour lesquels on verra en particulier que la longueur est bien $n - 2$.

En l'état actuel des connaissances, la question posée plus haut semble difficile à aborder. Une première difficulté réside tout simplement dans le fait qu'il y a plusieurs variétés de Fano lisses d'indice $n - 1$ (resp. $n - 2$), là où il y en a une seule d'indice $n + 1$ (resp. n), ce qui fait qu'on n'a pas une variété modèle X_0 bien déterminée à laquelle identifier notre variété de départ. En outre, les résultats d'identifications d'une variété de Fano par sa VMRT sont moins complets lorsque celle-ci a codimension au moins 2. Enfin bien sûr, l'analyse d'une famille couvrante de courbes rationnelles permettant d'identifier notre variété X de départ promet d'être encore plus complexe que dans les cas traités jusqu'à présent. Il me semble qu'il sera trop difficile d'améliorer suffisamment les techniques existantes et qu'il faudra introduire de nouvelles idées pour répondre à la question.

(2.16) Caractérisation par la longueur locale au point général. Dans son article [Miy04] annonce aussi une caractérisation de \mathbf{Q}^n par une condition moins forte : il définit la longueur locale de X en un point général x_0 comme l'entier

$$\ell(X, x_0) = \min\{-K_X \cdot C : C \subseteq X \text{ courbe rationnelle passant par } x_0\};$$

cet entier ne dépend pas du choix du point général x_0 , et je le noterai $\ell_{\text{gen}}(X)$. Miyaoka annonce que si X est une variété de Fano lisse telle que (i) le nombre de Picard $\rho(X) = 1$, et (ii) $\ell_{\text{gen}}(X) = \dim(X)$, alors X est isomorphe à la quadrique \mathbf{Q}^n .

Avec Andreas Höring nous n'avons pas été en mesure de démontrer cette caractérisation, qui serait pourtant fort utile et en tout cas plus facile à vérifier en pratique que celle du théorème (2.2). Je renvoie à [CaDr15] pour des résultats de classification des variétés de Fano lisses telles que $\ell_{\text{gen}}(X) = \dim(X)$ et $\rho(X) > 1$.

(2.17) Version relative. Pour finir, je mentionne que nous avons posé à notre étudiant en thèse Bruno Dewer le problème de classifier les fibrations de Mori de longueur sous-maximale : plus précisément, les fibrations de Mori sont les morphismes surjectifs à fibres connexes $f : X \rightarrow Y$ tels que $\dim(X) > \dim(Y)$ qui correspondent à la contraction d'un rayon extrémal R , voir (2.4), et on demande la classification des f tels que pour une fibre générale F on a

$$\dim(F) = \ell(R).$$

Par le théorème (2.2) et la formule d'ajonction, la fibre générale est une quadrique lisse. Le problème est de décrire en outre les fibres spéciales, qui sont typiquement singulières voire de dimension plus grande. Dans ce contexte on peut imaginer faire des arguments par dégénérescences comme dans [HN13] où sont classifiées les fibrations de Mori telles que $\dim(F) = \ell(R) - 1$ (ce résultat a été utilisé dans la preuve du corollaire (2.3)).

On pourra ensuite s'intéresser au cas des contractions de Mori birationnelles, pour lequel il faudra introduire de nouvelles techniques.

3 – Modules des courbes et surfaces polarisées

(3.1) Dans cette partie, je regroupe des résultats ayant pour point commun l'*application des modules* suivante. Soit \mathcal{S} une variété paramétrant des surfaces polarisées (S, L) , et \mathcal{SC} la famille des paires (S, C) telles que C est une courbe lisse sur S et $(S, \mathcal{O}_S(C)) \in \mathcal{S}$; on peut voir un peu grossièrement \mathcal{S} comme une famille de surfaces plongées dans un espace projectif, et \mathcal{SC} comme la famille de leurs sections hyperplanes lisses. Les courbes C apparaissant dans la famille \mathcal{SC} ont toutes le même genre géométrique g . L'application des modules dont on parle ici est

$$c : (S, C) \in \mathcal{SC} \mapsto [C] \in \mathcal{M}_g,$$

où \mathcal{M}_g désigne l'espace de modules des courbes de genre g . La question principale est, pour une classe d'isomorphisme $[C] \in \mathcal{M}_g$ donnée, de comprendre la fibre de c au dessus de $[C]$. En particulier, on se pose les problèmes de déterminer d'une part l'image de c dans \mathcal{M}_g , et d'autre part la dimension de la fibre $c^{-1}([C])$ pour tout $(S, C) \in \mathcal{SC}$.

(3.2) Ces questions sont intimement liées au *problème de l'extensibilité* : étant donné une variété $X \subseteq \mathbf{P}^n$, existe-t-il une variété $Y \subseteq \mathbf{P}^{n+1}$ autre qu'un cône telle que X est section hyperplane de Y ? On dit que X est *extensible* lorsque la réponse est affirmative, ou plus généralement *r-extensible* (ou extensible r fois) s'il existe $Y \subseteq \mathbf{P}^{n+r}$ autre qu'un cône telle que X est section linéaire de Y , $r \in \mathbf{N}^*$.

Dans le contexte du (3.1) ci-dessus, une classe $[C]$ est dans l'image de c si et seulement si la courbe C est extensible, dans le plongement adéquat. Plus généralement si C est extensible r fois, à une variété Y , alors il existe une famille de surfaces sections linéaires de Y contenant C paramétrée par un \mathbf{P}^{r-1} , ce qui tendanciellement indique que la fibre $c^{-1}([C])$ a dimension au moins $r - 1$. Il n'est toutefois pas évident en pratique de démontrer ce genre d'implication, voir le problème (5.21).

Dans le cadre de l'application des modules des surfaces $K3$ polarisées, nous avons démontré avec Ciro Ciliberto et Edoardo Sernesi qu'inversement une fibre de dimension $r > 0$ de l'application des modules au dessus d'une courbe canonique C non-téragonale implique l'existence d'une $(r + 1)$ -extension de C . Ce résultat constitue une réciproque au théorème (3.3) ci-dessous.

Il est entendu que les variétés extensibles sont spéciales. Une incarnation de ce principe est qu'un espace de modules de variétés extensibles est nécessairement uniréglé, puisque une hypersurface X de Y se déforme dans un système linéaire sur Y . De ce point de vue on peut être étonné qu'il existe des surfaces $K3$ en tout genre g ; il est plus attendu que les solides de Fano (éventuellement singuliers) n'existent qu'en genre $g \leq 37$, voir l'introduction de la section 3.1.

Une autre instance de cette philosophie est le théorème de la tour de Babel de Barth, Van de Ven et Tyurin (voir [Coa12]), qui affirme que parmi les variétés à singularités l.i.c. seules les intersections complètes sont extensibles un nombre infini de fois. Cet énoncé est faux sans l'hypothèse sur les singularités, voir [Bal]. Pour les variétés lisses on a l'énoncé suivant qui est plus effectif. Pour toute variété plongée $X \subseteq \mathbf{P}^n$, on introduit l'invariant

$$\alpha(X) = h^0(N_{X/\mathbf{P}^n}(-1)) - n - 1.$$

(3.3) Théorème (Zak–Lвовski [Zak91, Lvo92], voir aussi [Băd94]). *Soit $X \subseteq \mathbf{P}^n$ une variété lisse (projective et irréductible), non-dégénérée (c.-à-d. non contenue dans un hyperplan), autre qu'une quadrique. Si X est extensible r fois et $\alpha(X) < n$, alors $r \leq \alpha(X)$.*

Autrement dit, si X est extensible r fois alors $\alpha(X) \geq \min(r, n)$. En particulier $\alpha(X) > 0$ est une condition nécessaire à l'extensibilité de X .

Dans la première partie de ce chapitre je présente les résultats obtenus avec Ciro Ciliberto et Edoardo Sernesi mentionnés ci-dessus à propos des extensions des courbes canoniques et des surfaces $K3$. L'idée fondamentale sous-tendant ce travail est que l'espace $H^0(N_{X/\mathbf{P}^n}(-1))$ paramètre des *rubans* (c.-à-d. des épaissements infinitésimaux d'ordre 1 de X) candidats à être *intégrés* en des extensions de X (une 1-extension Y de X est une intégrale d'un ruban sur X si le premier voisinage infinitésimal de X dans Y est isomorphe à ce ruban), et que sous des hypothèses adéquates l'intégrale d'un ruban est unique. Cette idée provient des travaux [BM87, Voi92, ABS17, Wah97].

Ensuite je présente des travaux en commun avec Ciro Ciliberto, Concettina Galati et Andreas L. Knutsen dans lesquels nous étudions l'application des modules des surfaces d'Enriques polarisées. Dans ce cas la théorie des rubans fonctionne moins bien, voir (3.47), et il est plus difficile de faire le lien avec les extensions. L'espace des modules des surfaces d'Enriques polarisées est beaucoup plus compliqué que celui des surfaces $K3$, et une part importante du travail a consisté à chercher une description complète de ses composantes irréductibles, voir théorème (3.39).

Enfin dans la dernière partie je regroupe des résultats ayant trait à certains lieux particuliers dans les espaces de modules des courbes spin d'une part, et courbes Prym d'autre part, en lien avec les applications des modules des surfaces $K3$ et d'Enriques respectivement.

3.1 – Courbes canoniques, surfaces $K3$, et leurs extensions

Dans cette section je présente les résultats de l'article [5] avec quelques compléments tirés de [Z.2, 11, 12, 13]. Le résultat principal est le théorème (3.7) qui dit en particulier qu'une courbe canonique $C \subseteq \mathbf{P}^{g-1}$ de genre $g \geq 11$ non-tétragonale est toujours extensible $\alpha(C)$ fois. Je présente des applications variées de ce résultat, et l'illustre avec des exemples significatifs. À la fin de cette section, je montre que ces résultats s'étendent aux surfaces $K3$, et comment la théorie des rubans permet de répondre à une question posée par Beauville.

J'attire aussi l'attention sur le théorème (3.19) qui dit que la variation en modules des sections hyperplanes d'une surface $K3$ est maximale.

Je commence avec deux sous-sections dans lesquelles je présente le contexte.

Extensions des courbes canoniques

Une *courbe canonique* est une courbe C (projective lisse) de genre $g \geq 3$ plongée dans \mathbf{P}^{g-1} par le système linéaire complet $|K_C|$. Comme son nom l'indique, modulo les projectivités ce plongement ne dépend d'aucun choix.

Une extension lisse d'une courbe canonique est nécessairement une surface $K3$, mais il existe aussi des extensions singulières qui sont des surfaces rationnelles ou réglées (voir exemple (3.28)).

(3.4) Proposition [Epe84, Prop. 3.1]. *Soit $S \subseteq \mathbf{P}^g$ une surface dont une section hyperplane générale est une courbe canonique, et soit $\varepsilon : S' \rightarrow S$ la résolution minimale de ses singularités.*

(3.4.1) $h^1(\mathcal{O}_S) = 0$ et $h^2(\mathcal{O}_S) = 1$.

(3.4.2) S est projectivement normale.

(3.4.3) La dimension de Kodaira $\kappa(S')$ vaut $-\infty$ ou 0, et dans ce dernier cas S' est une surface $K3$.

Dans le cas où $\kappa(S') = -\infty$, on dira que S est une *vraie fausse surface $K3$* . Si $\kappa(S') = 0$, alors S est une surface $K3$ à singularités canoniques (en dimension 2 ce sont les singularités

de type *ADE*). L'objet central de [Epe84] est ensuite de classifier les types de vraies-fausse surfaces *K3*.

Un point clef dans la preuve de la proposition ci-dessus est que les courbes canoniques sont elles-mêmes projectivement normales. En appliquant le même raisonnement, on obtient par récurrence sur la dimension l'énoncé suivant (voir [CM86, Prop. 1.2] pour la dimension 3).

(3.5) Proposition. *Soit $X \subseteq \mathbf{P}^{g+n-2}$ une variété dont une section linéaire de dimension 1 générale est une courbe canonique. Alors X est arithmétiquement Gorenstein, normale, et son fibré canonique est $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(2-n)$.*

En dimension $n = 3$, il suit d'un théorème d'Ishii [Ish91] que si les sections hyperplanes de X sont des surfaces *K3* (à singularités *ADE*) alors X est à singularités canoniques sauf si c'est un cône (voir [5, Cor. 5.7] et les références qui y sont citées). On appellera *variété de Fano* une extension de courbe canonique qui est à singularités canoniques. Si les singularités ne sont pas canoniques, on parlera de *vraie-fausse variété de Fano*.

Prokhorov [Pro05] a démontré que les solides de Fano existent seulement en genre $g \leq 37$, et que les seuls solides de Fano de genre 37 sont les deux espaces projectifs à poids $\mathbf{P}(1, 1, 1, 3)$ et $\mathbf{P}(1, 1, 4, 6)$.

Courbes *K3* et application de Gauss–Wahl

Wahl d'une part et Beauville et Mérindol d'autre part ont démontré que si C est une section hyperplane lisse d'une surface *K3*, alors son application de Gauss–Wahl

$$\Phi_C : \bigwedge^2 H^0(C, K_C) \rightarrow H^0(C, 3K_C)$$

(définie par linéarité par la formule $\Phi_C(s \wedge t) = s \cdot dt - t \cdot ds$) n'est pas surjective [Wah87, BM87]. Il s'agit en fait d'un cas particulier du théorème de Zak–Lвовski, puisque le corang de Φ_C , $\text{corg}(\Phi_C) = h^0(C, 3K_C) - \text{rg}(\Phi_C)$, est égal à l'invariant $\alpha(C)$ de Lвовski, voir (3.9). La démonstration de Wahl est basée sur l'étude des déformations du cône au dessus de C , tandis que celle de Beauville et Mérindol introduit implicitement la notion de ruban. Ils démontrent [BM87, Prop. 3] que si une section hyperplane lisse C dans une surface *K3* S a son premier voisinage infinitésimal trivial (c.-à-d. s'il existe une rétraction de celui-ci sur C), alors il existe une involution de S dont le lieu fixe est C , et que ceci est possible seulement si C est un diviseur bi-anticanonique d'une surface de Del Pezzo T . (Réciproquement, si $C \in |-2K_T|$, le revêtement double de T ramifié au dessus de C est une surface *K3* intégrale du ruban trivial sur C). Si le ruban de C dans S est non-trivial, la classe d'extension correspondante fournit un élément non nul dans le conoyau $\text{coker}(\Phi_C)$, ce qui prouve la non-surjectivité de Φ_C .

Il a fallu attendre trente ans pour qu'une réciproque voie le jour, obtenue par Arbarello, Bruno et Sernesi.

(3.6) Théorème [ABS17]. *Soit C une courbe de genre $g \geq 12$ Brill–Noether–Petri générale. Alors C (dans son plongement canonique) est section hyperplane d'une surface *K3* (éventuellement dégénérée) si et seulement si son application de Gauss–Wahl Φ_C est non-surjective.*

Dans cet énoncé, par *surface *K3* dégénérée* on entend une surface $S \subseteq \mathbf{P}^g$ qui peut être lissifiée dans \mathbf{P}^g en une surface *K3*. Il existe de vraies fausses surfaces *K3* (voir p. 30) qui ne sont pas lissifiables en des surfaces *K3*. En ce sens on peut penser aux surfaces *K3* dégénérées comme étant de fausses vraies surfaces *K3*, mais une telle terminologie serait sans doute plus source de confusion qu'autre chose.

En réalité le Théorème (3.6) se scinde en deux parties assez nettement distinctes, dont la première est la clef de voûte de notre article [5]. Il s'agit de compléter les résultats de [Wah97].

Arbarello–Bruno–Sernesi démontrent que pour toute courbe canonique $C \subseteq \mathbf{P}^{g-1}$ de genre $g \geq 11$ et d'indice de Clifford $\text{Cliff}(C) \geq 3$ (voir définition p. 32), on a pour tout entier $k \geq 3$ l'annulation $H^1(C, \mathcal{I}_{C/\mathbf{P}^{g-1}}^2(k)) = 0$ ($\mathcal{I}_{C/\mathbf{P}^{g-1}}^2$ désigne le carré de l'idéal de C dans \mathbf{P}^{g-1}) ; Wahl avait démontré ces annulations pour les courbes canoniques générales de genre $g \geq 3$ [Wah97, Cor. 5.7]. Ces annulations impliquent par [Wah97, Thm. 7.1] que la courbe C est extensible si et seulement si Φ_C n'est pas surjective.

La seconde partie de [ABS17] est consacrée à une étude fine des vraies fausses surfaces $K3$, basée sur la classification donnée dans [Epe84], pour démontrer que si C est Brill–Noether–Petri générale de genre $g \geq 12$ alors toute extension de $C \subseteq \mathbf{P}^{g-1}$ est lissifiable dans \mathbf{P}^g .

*Ça fait deux jours que nous marchons,
Gardons courage,
Nous arrivons,
Vers le pays que nous aimons,
Laissons les rubis, rubans qui volent,
Laissons les rubans voler.*

Chanson de marche de l'infanterie

Intégrales des rubans sur une courbe canonique

Le point de départ du travail [5] est la réalisation du fait que les énoncés de [Wah97] et [ABS17] ci-dessus donnent en fait un résultat d'intégrabilité des rubans sur C . Un *ruban* sur une variété $X \subseteq \mathbf{P}^n$ (de fibré normal $\mathcal{O}_X(1)$) est un schéma \tilde{X} tel que $\tilde{X}_{\text{red}} = X$, $\mathcal{I}_{\tilde{X}/X}^2 = 0$, et $\mathcal{I}_{\tilde{X}/X} = \mathcal{O}_X(-1)$. Si X est lisse et $Y \subseteq \mathbf{P}^{n+1}$ est une extension de X , alors le premier voisinage infinitésimal de X dans Y est un ruban sur X , qu'on note $2X_Y$. Dans ces conditions on dit que Y est une *intégrale* du ruban $2X_Y$. Si $C \subseteq \mathbf{P}^{g-1}$ est une courbe canonique, l'espace $\mathbf{P}(\ker({}^T\Phi_C))$ paramètre naturellement les classes d'isomorphismes de rubans non-triviaux sur C susceptibles d'être intégrés en une extension, voir (3.9), et la construction de [Wah97, Thm. 7.1] montre que si $\text{Cliff}(C) \geq 3$ et $H^1(C, \mathcal{I}_{C/\mathbf{P}^{g-1}}^2(k)) = 0$ pour tout $k \geq 3$, alors ces rubans sont tous intégrables.

Le résultat central de [5] est la démonstration du fait que les surfaces dans \mathbf{P}^g intégrales de rubans s'arrangent en une famille universelle au dessus de $\mathbf{P}(\ker({}^T\Phi_C))$, ce qui permet ensuite de les assembler pour former une r -extension de C , $r = \text{corg}(\Phi_C)$.

(3.7) Théorème. *Soit $C \subseteq \mathbf{P}^{g-1}$ une courbe canonique de genre $g \geq 11$ et d'indice de Clifford $\text{Cliff}(C) \geq 3$, ou de genre $g \geq 7$ et générale. Notons $r = \text{corg}(\Phi_C)$. Il existe une variété $X \subseteq \mathbf{P}^{g-1+r}$ ayant C comme section linéaire, et telle que pour toute surface $S \subseteq \mathbf{P}^g$ étendant C autre qu'un cône, il existe une unique section linéaire de X contenant C isomorphe à S .*

La variété X a dimension $r + 1$, est arithmétiquement Gorenstein et normale, et son fibré canonique est $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(1 - r)$.

Dans ces conditions, on dit que la variété X est une *extension universelle* de C .

L'hypothèse sur l'indice de Clifford est absolument nécessaire (elle est automatiquement vérifiée pour une courbe de genre $g \geq 7$ générale). Par [Gre84, Appendix] et [Voi88, Sch91], elle équivaut à ce que C n'est pas hyperelliptique, et son plongement canonique $C \subseteq \mathbf{P}^{g-1}$ satisfait à la condition N_2 de Green (voir (3.10) ci-dessous), qui est une condition *sine qua non* pour pouvoir appliquer la construction de [Wah97, Thm. 7.1].

Je rappelle la définition de l'indice de Clifford de C ,

$$\text{Cliff}(C) := \min\left(\left\lfloor \frac{g-1}{2} \right\rfloor, \min_{\{L \in \text{Pic}(C) : r(L) \geq 1 \text{ and } r(K_C - L) \geq 1\}} (\deg(L) - 2r(L))\right)$$

où $r(L) = h^0(L) - 1$. La condition $\text{Cliff}(C) > 2$ revient à demander que C ne possède ni g_4^1 ni g_6^2 , ce qui impose le genre $g \geq 7$; en genre $g \geq 11$, il suffit de ne pas posséder de g_4^1 c.-à-d. de ne pas être tétragonale. Une courbe générale de genre g a indice de Clifford $\lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor$, supérieur à 3 si $g \geq 7$.

(3.8) Si $X \subseteq \mathbf{P}^n$ est une variété lisse satisfaisant à la condition N_2 , alors l'intégrale d'un ruban sur X est unique à projectivités près [5, Rmk. 4.8] : en regardant droit dans les yeux la fameuse construction de [Wah97, Thm. 7.1], on voit en effet que deux intégrales diffèrent par un élément de $H^0(X, N_{X/\mathbf{P}^n}(-2))$, or la condition N_2 entraîne $H^0(X, N_{X/\mathbf{P}^n}(-k)) = 0$ pour tout $k \geq 2$. Étonnamment cette propriété n'a à ma connaissance pas été explicitement relevée avant [5]; elle joue un rôle fondamental dans ce travail, et d'ailleurs elle avait déjà été implicitement utilisée auparavant.

Ceci donne une lumière nouvelle sur la nécessité de la non-surjectivité de l'application de Wahl pour qu'une courbe canonique C soit extensible : si les rubans sur C s'étendent de manière unique, alors la seule extension S de C dans laquelle le premier voisinage infinitésimal est trivial est le cône, et ainsi si S est une surface $K3$ ce voisinage infinitésimal est non-trivial, et donne un élément non-nul de $\ker(\text{T}\Phi_C)$.

Néanmoins, on a l'exemple suivant [BM87, Prop. 3 et Rmq. 4], déjà relevé plus haut : soit C une courbe lisse bi-anticanonique d'une surface de Del Pezzo F , et soit S le revêtement double de F ramifié au dessus de C . La surface S est $K3$, et contient C de sorte que le ruban correspondant est trivial. Dans ce cas on a $\text{Cliff}(C) < 3$.

Moralement, lorsque $\text{Cliff}(C) \leq 2$ les extensions de C à premier voisinage infinitésimal fixé sont contrôlées par $\bigoplus_{l \geq 2} H^0(N_{C/\mathbf{P}^{g-1}}(-l))$. Plus généralement, les extensions à $(k-1)$ -ème voisinage infinitésimal fixé devraient être contrôlées par $\bigoplus_{l \geq k} H^0(N_{C/\mathbf{P}^{g-1}}(-l))$. Ces attentes se concrétisent pour les courbes canoniques intersections complètes, et pour les quintiques et sextiques planes, voir [Z.2, 11, 12].

Je vais maintenant donner une idée de la preuve du théorème (3.7), après quelques préliminaires techniques.

(3.9) Un ruban \tilde{X} sur $X \subseteq \mathbf{P}^n$ de fibré normal $\mathcal{O}_X(1)$ est uniquement déterminé par sa classe d'extension $e_{\tilde{X}} \in \text{Ext}^1(\Omega_X^1, \mathcal{O}_X(-1))$, et deux rubans sont isomorphes si et seulement si leurs classes d'extension sont proportionnelles. Lorsque X est lisse et section hyperplane de $Y \subseteq \mathbf{P}^{n+1}$, la classe du ruban $2X_Y$ est dans le noyau de l'application

$$\eta : \text{Ext}^1(\Omega_X^1, \mathcal{O}_X(-1)) \rightarrow \text{Ext}^1(\Omega_{\mathbf{P}^n}^1|_X, \mathcal{O}_X(-1))$$

induite par la suite exacte conormale de $X \subseteq \mathbf{P}^n$.

Lorsque $X \subseteq \mathbf{P}^n$ est une courbe canonique $C \subseteq \mathbf{P}^{g-1}$ (resp. une surface $K3$ linéairement normale $S \subseteq \mathbf{P}^g$) l'application η est $\text{T}\Phi_C$ (resp. 0). Il en résulte que $\ker(\text{T}\Phi_C)$ (resp. $H^1(T_S(-1))$) paramètre les rubans sur $X \subseteq \mathbf{P}^n$ susceptibles d'être intégrés en une extension $Y \subseteq \mathbf{P}^{n+1}$ de X . Dans les deux cas, cet espace s'identifie canoniquement à un quotient

$$H^0(X, N_{X/\mathbf{P}^n}(-1))/H^0(X, \mathcal{O}_X(1))^\vee.$$

La différence entre $\ker(\text{T}\Phi_C)$ (resp. $H^1(T_S(-1))$) et $H^0(X, N_{X/\mathbf{P}^n}(-1))$ correspond à l'espace tangent au groupe des projectivités de \mathbf{P}^n agissant comme l'identité sur un hyperplan.

(3.10) La construction de Wahl. Soit $C \subseteq \mathbf{P}^{g-1}$ une courbe canonique comme dans (3.7). Dire que C satisfait à la condition N_2 de Green signifie que son idéal a une présentation minimale de la forme

$$(3.10.1) \quad \cdots \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{g-1}}(-3)^{\oplus m_1} \xrightarrow{\mathbf{r}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{g-1}}(-2)^{\oplus m} \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathcal{I}_{C/\mathbf{P}^{g-1}} \longrightarrow 0.$$

Soit $e \in \ker({}^T\Phi_C)$; on en choisit un relèvement $v \in H^0(C, N_{C/\mathbf{P}^{g-1}}(-1))$; la présentation (3.10.1) réalise ce dernier espace comme un sous-espace de $H^0(C, \mathcal{O}_C(1))^m$, ce qui permet de représenter v par un vecteur \mathbf{f}_v de formes linéaires sur \mathbf{P}^{g-1} . Le ruban défini par e est le sous-schéma de \mathbf{P}^g défini par les $m+1$ équations quadratiques

$$(3.10.2) \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) + t\mathbf{f}_v(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad t^2 = 0$$

en les coordonnées homogènes $(\mathbf{x} : t) = (x_0 : \dots : x_{g-1} : t)$. Sous les hypothèses énoncées plus haut, Wahl démontre par un calcul de théorie des déformations qu'il existe un vecteur de constantes \mathbf{h}_v tel que les m équations

$$(3.10.3) \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) + t\mathbf{f}_v(\mathbf{x}) + t^2\mathbf{h}_v = \mathbf{0}.$$

définissent une surface, intégrale du ruban défini par e .

(3.11) Mise en famille des intégrales. La construction en famille donnant le théorème (3.7) est la suivante. Pour simplifier les notations, je vais effectuer la construction au dessus d'une droite contenue dans $\mathbf{P}(\ker({}^T\Phi_C))$. Soit $v_0, v_1 \in H^0(N_{C/\mathbf{P}^{g-1}}(-1))$ représentant deux points distincts de $\mathbf{P}(\ker({}^T\Phi_C))$, et considérons les deux familles $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1 \subseteq \mathbf{P}^g \times \mathbf{A}^1$ définies par les équations

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) + t\mathbf{f}_{v_0+a_1v_1}(\mathbf{x}) + t^2\mathbf{h}_{v_0+a_1v_1} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) + t\mathbf{f}_{a_0v_0+v_1}(\mathbf{x}) + t^2\mathbf{h}_{a_0v_0+v_1} = \mathbf{0}$$

respectivement, où a_1 , resp. a_0 , est la coordonnée affine sur \mathbf{A}^1 . On vérifie que l'application $([\mathbf{x} : t], a_1) \in \mathcal{S}_0 \mapsto ([\mathbf{x} : a_1t], 1/a_1) \in \mathcal{S}_1$ réalise un isomorphisme entre ces deux familles au dessus de $\mathbf{A}^1 - \{0\}$, ce qui permet de les recoller pour obtenir une famille $\mathcal{S} \subseteq \mathbf{P}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}^g \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1))$ au dessus de $\mathbf{P}^1 = \mathbf{P}(\mathbf{C}.v_0 \oplus \mathbf{C}.v_1)$. On obtient finalement un solide dans \mathbf{P}^{g+1} en prenant l'image de \mathcal{S} par le morphisme défini par le système linéaire complet $|\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}^g \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1))}(1)|$. \square

Application des modules des courbes sur une surface $K3$

Pour les surfaces $K3$ on dispose d'espaces de modules bien compris, voir par exemple [Pal85] et [Huy16]. Il existe un espace de modules irréductible de dimension 20 de toutes les surfaces $K3$ complexes, et pour tout entier $g \geq 2$ il contient une hypersurface irréductible paramétrant les surfaces $K3$ primitivement polarisées de genre g .

(3.12) Je note pour tout $g \geq 2$:

- \mathcal{K}_g l'espace de modules des surfaces $K3$ polarisées de genre g , c.-à-d. les paires (S, L) où S est une surface $K3$ lisse, et L un fibré ample et globalement engendré sur S , tel que $L^2 = 2g - 2$;
- \mathcal{KC}_g l'espace de modules des paires (S, C) avec C une courbe lisse sur S , telle que $(S, \mathcal{O}_S(C)) \in \mathcal{K}_g$;
- \mathcal{M}_g l'espace de modules des courbes lisses de genre g ;
- $c_g : \mathcal{KC}_g \rightarrow \mathcal{M}_g$ le morphisme d'oubli $[S, C] \mapsto [C]$.

L'espace \mathcal{K}_g possède plusieurs composantes irréductibles, une première notée $\mathcal{K}_g^{\text{prim}}$ correspondant aux surfaces (S, L) primitivement polarisées c.-à-d. telles que la classe de L dans

$\text{Pic}(S)$ n'est pas divisible, et une autre pour chaque entier $k > 1$ tel qu'il existe $g_1 \in \mathbf{N}$ avec $2g - 2 = k^2(2g_1 - 2)$, notée \mathcal{K}_g^k et paramétrant les paires (S, kL) avec $[S, L] \in \mathcal{K}_{g_1}^{\text{prim}}$. On notera de manière correspondante $\mathcal{K}\mathcal{C}_g^{\text{prim}}$ (resp. $\mathcal{K}\mathcal{C}_g^k$) et c_g^{prim} (resp. c_g^k).

L'espace \mathcal{K}_g (resp. $\mathcal{K}\mathcal{C}_g$) est équidimensionnel de dimension 19 (resp. $19 + g$), tandis que \mathcal{M}_g a dimension $3g - 3$ si bien que

$$(3.12.1) \quad \dim(\mathcal{K}\mathcal{C}_g) - \dim(\mathcal{M}_g) = 2(11 - g).$$

L'application des modules c_g^{prim} a été largement étudiée, et est souvent appelée application de Mukai. Pour $g \geq 11$, elle est birationnelle sur son image si $g \neq 12$, et sa fibre générique est irréductible de dimension 1 si $g = 12$ ([Muk92b] et [CLM93, § 5.3]). Pour $g \leq 11$, elle est dominante si $g \neq 10$ [Muk88] et domine une hypersurface de \mathcal{M}_{10} si $g = 10$ [CU93], avec fibre générique irréductible dans les deux cas [CM90, CLM93]. Le cas non primitif a été étudié dans [CFGK17, Kem15]; avec Ciliberto nous complétons cette étude dans [11] en tirant parti du théorème (3.7).

Les cas où la fibre générique de c_g^{prim} a dimension positive s'expliquent par la présence d'extensions de dimension > 2 pour le membre général de l'image de c_g^{prim} [Muk88], voir le paragraphe consacré à cette question ci-dessous. Plus généralement, Beauville [Bea04, Sec. 5] a observé que l'application c_g est ramifiée aux points $[S, C]$ tels que la surface S est extensible en un solide lisse (voir lemme (3.15) ci-dessous). Notre résultat (théorème (3.13)) dit que, pourvu que $g \geq 11$ et $\text{Cliff}(C) \geq 3$ (ou que $g \geq 7$ et C est générale), toute la ramification de c_g provient de ce même phénomène.

(3.13) Théorème. *Soit $(S, C) \in \mathcal{K}\mathcal{C}_g$ avec $g \geq 11$ et tel que $\text{Cliff}(C) > 2$. Alors*

$$\dim(\ker(dc_g)_{(S,C)}) = \dim(c_g^{-1}(C)) = \text{cork}(\Phi_C) - 1.$$

Preuve. On a la chaîne suivante d'égalités et inégalités :

$$\begin{aligned} \text{cork}(\Phi_C) - 1 &\leq \dim(c_g^{-1}(C)) \\ &\leq \dim(\ker(dc_g)_{(S,C)}) \\ &= h^1(T_S(-1)) \\ &\leq \text{cork}(\Phi_C) - 1, \end{aligned}$$

dont la première est une conséquence relativement directe du théorème (3.7), la seconde est évidente, la troisième provient de l'identification du noyau de la différentielle dc_g par théorie des déformations habituelle, et la quatrième résulte après quelques calculs cohomologiques des identifications de $\ker(\mathbb{T}\Phi_C)$ et $H^1(S, T_S(-1))$ à des quotients de $H^0(C, N_{C/\mathbf{P}^{g-1}}(-1))$ et $H^0(C, N_{S/\mathbf{P}^g}(-1))$ respectivement, voir (3.9). \square

On retiendra aussi le résultat suivant, conséquence de la chaîne d'inégalités dans la preuve ci-dessus.

(3.14) Corollaire. *Dans les conditions du théorème (3.13), on a $\text{cork}(\Phi_C) = h^1(T_S(-1)) + 1$.*

Pour clore cette partie je donne l'énoncé et la preuve du lemme de Beauville et Mukai dont j'ai déjà parlé.

(3.15) Lemme ([Muk92b] et [Bea04, Prop. 5.4]). *Soit V un solide de Fano de genre g tel que $-K_V$ est très ample, $S \in |-K_V|$ une surface K3, et C une section hyperplane lisse de S pour la polarisation induite par $-K_V$. Alors la fibre de c_g au point $[S, C]$ est de dimension strictement positive.*

Preuve. Une courbe $C \in |-K_V|_S|$ générale est le lieu de base d'un pinceau de Lefschetz $\mathbb{1}$ de sections hyperplanes de V , dans son plongement anticanonique. Le membre général de ce pinceau est une surface K3 lisse, et les membres singuliers possèdent un unique point double ordinaire pour toute singularité. Ceci implique que l'application modulaire $\mathbb{1} \rightarrow \mathcal{K}_g$ va au bord de \mathcal{K}_g (puisque pour un membre singulier S_0 du pinceau, $-K_V|_{S_0}$ est seulement big et pas ample), et donc qu'elle n'est pas constante. On en déduit le résultat pour toute courbe lisse $C \in |-K_V|_S|$ par semi-continuité. \square

Variétés de Mukai

(3.16) Pour $g = 7, 8, 9, 10$ il existe une variété $M_g \subseteq \mathbf{P}(U_g)$, homogène pour un groupe algébrique simple G_g dont U_g est une représentation irréductible, telle qu'une surface K3 (resp. une courbe canonique) de genre g primitive générale est section linéaire de M_g , voir le tableau ci-dessous. Ces variétés ont été introduites par Mukai en lien avec l'étude de l'application des modules c_g^{prim} et sont aujourd'hui bien connues. Il existe également des variétés aux propriétés similaires en genres 6 et 12, mais je n'en parlerai pas ici.

Les variétés de Mukai sont les exemples qui ont guidé notre intuition pour établir le théorème (3.7), mais il n'est toutefois pas évident *a priori* que ce sont bien les extensions universelles des courbes canoniques de genre g générales, pour $g = 7, 8, 9, 10$. Nous avons démontré après coup que c'est bien le cas avec Ciro Ciliberto dans [11].

La preuve utilise le fait qu'on connaît la dimension des VMRT (voir (2.8)) des variétés de Mukai, ce qui permet d'établir le lemme ci-dessous. D'après [LM03, Thm. 4.8], pour tout $x \in M_g$, la variété des droites contenues dans M_g passant par x est elle-même une variété homogène M'_g comme indiqué dans le tableau ci-dessous.

g	M_g	$\dim(M_g)$	M'_g	$\dim(M'_g)$	G_g	U_g
7	S_{10}	10	$\mathbf{G}(2, 5)$	6	Spin_{10}	Δ_+
8	$\mathbf{G}(2, 6)$	8	$\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^3$	4	SL_6	$\wedge^2 \mathbf{C}^6$
9	$\text{LG}(3, 6)$	6	\mathbf{P}^2	2	Sp_6	$\wedge^{(3)} \mathbf{C}^6$
10	G_2/P_2	5	\mathbf{P}^1	1	G_2	\mathfrak{g}_2

(3.17) Lemme [11]. *Soit $\Lambda \subseteq \mathbf{P}(U_g)$ un sous-espace linéaire de dimension $g - 1$ tel que $C = \Lambda \cap M_g$ est une courbe lisse. Pour tout sous-espace linéaire $\tilde{\Lambda} \subseteq \mathbf{P}(U_g)$ de dimension g contenant C , l'intersection $\tilde{\Lambda} \cap M_g$ n'est pas un cône sur C .*

Preuve. Supposons par l'absurde qu'il existe un sous-espace $\tilde{\Lambda}$ comme ci-dessus tel que $\tilde{\Lambda} \cap M_g$ contienne le cône de sommet v sur C . Alors $\tilde{\Lambda} = \langle v, C \rangle$ est contenu dans l'espace projectif tangent $\mathbf{T}_v M_g$. D'autre part l'ensemble des droites contenues dans M_g passant par v forment un cône K_v de sommet v contenu lui aussi dans $\mathbf{T}_v M_g$, et de dimension $\dim(M'_g) + 1$ donc de codimension 3 dans $\mathbf{T}_v M_g$. Alors $K_v \cap \tilde{\Lambda}$ est de dimension au moins $g - 3$, ce qui est en contradiction avec le fait que $\Lambda \cap M_g$ est une courbe. \square

Sous les hypothèses du lemme, on considère alors l'application rationnelle

$$r : \tilde{\Lambda} \in \mathbf{P}(U_g)/\Lambda \dashrightarrow [2C_{\tilde{\Lambda} \cap M_g}] \in \mathbf{P}(\ker({}^T \Phi_C))$$

qui à un sous-espace linéaire $\tilde{\Lambda} \subseteq \mathbf{P}(U_g)$ de dimension g contenant C associe la classe d'isomorphisme du ruban sur C défini par la surface $\tilde{\Lambda} \cap M_g$ étendant C .²⁰ Cette application rationnelle est induite par une application linéaire, dont le lemme (3.17) prouve qu'elle est injective. Puisque les deux espaces projectifs $\mathbf{P}(U_g)/\Lambda$ et $\mathbf{P}(\ker({}^T\Phi_C))$ ont la même dimension, r est un isomorphisme, et donc M_g est l'extension universelle de C .

(3.18) Ceci nous permet ensuite de démontrer que deux courbes lisses sections linéaires de M_g sont isomorphes si et seulement si il existe un élément du groupe G_g envoyant l'une sur l'autre. Nous déduisons ce résultat de l'énoncé analogue pour les surfaces $K3$ démontré par Mukai dans [Muk88]. Mukai a par ailleurs [Muk92a] démontré lui même ce résultat, par une autre méthode.

Enfin j'observe, comme il avait déjà été fait dans [CLM98] que l'application du théorème de Zak–Lвовski (3.3) à C , une courbe lisse section linéaire de M_g , montre que les variétés de Mukai ne sont pas extensibles.

Variation maximale

(3.19) Théorème [5, 11]. *Soit S une surface $K3$ de genre $g \geq 11$ telle que $\text{Cliff}(S) > 2$ ou de genre $g \geq 7$ et générale, et soit C section hyperplane lisse de S . Il n'existe qu'un nombre fini de sections hyperplanes de S qui sont isomorphes à C .*

Pour $g \geq 11$, nous obtenons ce théorème comme corollaire de la proposition ci-dessous. Pour $g = 7, 8, 9, 10$ nous faisons la preuve à la main dans [11], en utilisant les variétés de Mukai.

(3.20) Proposition [5]. *Soit C une courbe canonique de genre $g \geq 11$ telle que $\text{Cliff}(C) > 2$. On suppose que C est section d'une surface $K3$. Soit U l'ouvert maximal de définition de l'application rationnelle*

$$s : \mathbf{P}(\ker({}^T\Phi_C)) \dashrightarrow \mathcal{K}_g$$

qui à une classe d'isomorphisme de ruban sur C associe le module de son unique surface intégrale. Alors le morphisme $s|_U$ est à fibres finies.

Le lieu d'indétermination de l'application s ci-dessus est constitué des classes de ruban dont l'intégrale est une vraie-fausse surface $K3$. Nous démontrons cette proposition par l'absurde : si $\gamma \subseteq U$ est une courbe contractée par s , alors elle doit nécessairement rencontrer $\mathbf{P}(\ker({}^T\Phi_C)) - U$; on obtient ainsi une famille de surfaces extensions de C au dessus du disque unité, isotriviale au dessus du disque épointé, et avec fibre centrale S_0 une vraie-fausse surface $K3$. On arrive à montrer qu'alors S_0 possède nécessairement une structure de fibré en \mathbf{P}^1 sur C , ce qui par un résultat d'Epema implique que S_0 est un cône : ceci contredit le fait que le ruban de C dans S_0 est non-trivial.

Preuve du théorème (3.19). Supposons par l'absurde qu'il existe une infinité de sections hyperplanes C_i de S isomorphes à C . D'après la proposition (3.20) on peut supposer que ces sections ont toutes le même ruban dans S . Par unicité de l'intégrale d'un ruban, ceci implique qu'il existe des automorphismes projectifs ω_i de $S \subseteq \mathbf{P}^g$ tels que $\omega_i(C_i) = C$. Ceci contredit la finitude du groupe des automorphismes d'une surface $K3$ polarisée. \square

^{20.} par abus de notation, j'écris $\mathbf{P}(U_g)/\Lambda$ pour l'espace projectif des sous-espaces linéaires de dimension g contenant Λ .

(3.21) La proposition (3.20) donne la borne supérieure

$$\text{cork}(\Phi_C) \leq 20$$

pour une courbe canonique section d'une surface K3, sous les hypothèses habituelles. Cette borne est vraisemblablement loin d'être optimale et il serait intéressant de l'améliorer. Elle permet malgré tout d'appliquer le théorème de Zak–Lвовski (3.3) pour montrer que l'existence d'une r -extension de C entraîne que le corang de Φ_C est au moins r , si C est de genre $g \geq 22$ et est section hyperplane d'une surface K3.

(3.22) Application à la conjecture de Matsushita. Soit X une variété hyperkählérienne projective de dimension $2n$, possédant une fibration lagrangienne $f : X \rightarrow \mathbf{P}^n$. La conjecture de Matsushita affirme que l'application des modules, qui envoie $b \in \mathbf{P}^n$ général sur le module de la variété abélienne polarisée X_b , a une image de dimension ou bien 0 ou bien n . Elle a été démontrée par van Geemen et Voisin pour une fibration lagrangienne générique.

Soit (S, L) une surface K3 polarisée de genre g . Soit $\mathcal{C} \rightarrow |L|$ la courbe universelle, et X la jacobienne relative compactifiée; c'est une variété hyperkählérienne appelée système de Beauville–Mukai. Le théorème (3.19) démontre la conjecture de Matsushita pour les systèmes de Beauville–Mukai. Cette remarque m'a été faite par Eyal Markman.

Quelques remarques

Le théorème (3.7) nous dit que les extensions d'une courbe canonique s'arrangent en une famille universelle irréductible. On peut donc parler d'une extension générale d'une courbe donnée, et on a directement les deux énoncés ci-dessous. Soit $C \subseteq \mathbf{P}^{g-1}$ une courbe canonique de genre $g \geq 11$ et d'indice de Clifford $\text{Cliff}(C) \geq 3$, ou de genre $g \geq 7$ et générale.

(3.23) Corollaire. *Si C est section hyperplane d'une surface K3 lisse (resp. à singularités canoniques) alors une surface extension de C générale est une surface K3 lisse (resp. à singularités canoniques).*

(3.24) Corollaire. *Si C est section hyperplane de deux surfaces K3 S et S' , alors les indices de divisibilité des classes de C dans $\text{Pic}(S)$ et $\text{Pic}(S')$ respectivement sont égaux.*

Ce dernier énoncé dit que, dans la notation introduite en (3.12), on a dans \mathcal{M}_g différents lieux images des c_g^k , $k \in \mathbf{N}^*$, qui sont disjoints sauf éventuellement le long du lieu tétragonal dans \mathcal{M}_g .

(3.25) Si C est une courbe section hyperplane d'une surface K3, et si le genre g de C vérifie $g > 37$, alors C n'est extensible qu'une seule fois. En effet, l'existence d'une extension universelle impliquerait alors l'existence d'une 2-extension de C qui serait un solide de Fano à singularités canoniques et Gorenstein, et Prokhorov a démontré que tous ces solides ont genre $g' \leq 37$.

Cependant il existe des courbes de genre arbitrairement grand qui sont extensibles au moins 10 fois : c'est le cas de toutes les courbes planes lisses, voir le théorème (3.27). D'autre part un examen (fastidieux mais instructif) de la liste de tous les solides de Fano lisses et à nombre de Picard $\rho > 1$ montre que leurs courbes sections linéaires dans le plongement anticanonique sont Brill–Noether spéciales.

(3.25.1) *Question.* Existe-t-il des courbes Brill–Noether générales de genre $g \geq 11$, $g \neq 12$, telles que $\text{cork}(\Phi_C) > 1$?

Par ailleurs il serait intéressant pour chacun des solides de Fano V de déterminer s'ils sont extensibles ou non. Pour le voir, on peut calculer le co-rang de l'application de Wahl d'une courbe C section linéaire de V dans son plongement anticanonique. C'est un calcul qu'il est possible de faire de manière rigoureuse en utilisant un ordinateur, par exemple en partant de la description des solides de Fano lisses comme sections de fibrés vectoriels homogènes sur des produits de Grassmanniennes donnée dans [DBFT]. C'est un travail que j'ai commencé à faire avec Enrico Fatighenti et Fabio Tanturri.

Dans le même genre d'idées, nous avons étudié avec Edoardo Sernesi [13] l'extensibilité des solides de Fano à singularités canoniques et Gorenstein qui sont des espaces projectifs à poids. Certains sont extensibles, et les extensions correspondantes restent à identifier. C'est une question que j'ai proposée à mon étudiant en thèse Bruno Dewer.

Avec Ciro Ciliberto nous avons eu l'idée d'étudier les extensions des sections hyperplanes de surfaces $K3$ non primitives, c.-à-d. les surfaces $S \subseteq \mathbf{P}^g$ telles que $L = \mathcal{O}_S(1)$ est divisible dans $\text{Pic}(S)$. Nous avons considéré en particulier le cas où L est un multiple d'une polarisation de genre g_1 petit.

Le cas $g_1 = 2$, étudié dans [Z.2], est très amusant, mais je ne présenterai pas ces résultats dans ce mémoire, puisque cet article n'est pas encore publié. Les autres cas sont étudiés dans [11]. Dans les cas intersections complètes $3 \leq g_1 \leq 5$ on obtient quelques nouvelles variétés de Fano singulières comme extensions universelles. Pour $7 \leq g_1 \leq 10$, nous sommes conduits à étudier des analogues du résultat (3.18) pour les intersections complètes de degrés $(1, \dots, 1, k)$ dans les variétés de Mukai ; on en déduit que ces courbes sont extensibles une fois seulement.

Extensions universelles à la Totaro

Pour les sections de degré $k > 1$ d'une surface $K3$ intersection complète, nous avons donné avec Ciro Ciliberto [11] une construction de l'extension universelle, inspirée par les variétés de Fano que nous a communiquées Burt Totaro pour les sections de degrés 4 et 5 d'une $K3$ de genre 2, voir [Z.2]. Je me contenterai d'expliquer cette construction sur l'exemple suivant.

(3.26) Exemple [11]. Soit $C \subseteq \mathbf{P}^3$ une courbe lisse intersection complète d'une quartique et d'une cubique. Son modèle canonique est $v_3(C) \subseteq \mathbf{P}^{18}$, donné par le système linéaire des cubiques. Les surfaces $K3$ étendant $v_3(C) \subseteq \mathbf{P}^{18}$ sont les images par le système linéaire des cubiques des surfaces quartiques lisses de \mathbf{P}^3 contenant $C \subseteq \mathbf{P}^3$.

Notons f et g des équations de degrés 4 et 3 définissant $C \subseteq \mathbf{P}^3$. Abstraitement, l'extension universelle de C est l'hypersurface quartique $X_{4,3} \subseteq \mathbf{P}(1^4, 3^4)$ d'équation

$$(3.26.1) \quad f(\mathbf{x}) + \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = f(x_0, \dots, x_3) + x_0y_0 + \dots + x_3y_3 = 0,$$

où les x_i (resp. y_i) sont les coordonnées homogènes de poids 1 (resp. 3) de l'espace projectif à poids $\mathbf{P}(1^4, 3^4)$. En effet, toute quartique de \mathbf{P}^3 contenant C est définie par une équation en \mathbf{x} de la forme

$$(3.26.2) \quad f(\mathbf{x}) + (a_0x_0 + \dots + a_3x_3)g(\mathbf{x}) = 0,$$

$a_0, \dots, a_3 \in \mathbf{C}^4$, et s'identifie donc à la section de $X_{4,3}$ par quatre hypersurfaces cubiques de $\mathbf{P}(1^4, 3^4)$ définie par

$$(3.26.3) \quad y_0 - a_0g(\mathbf{x}) = \dots = y_3 - a_3g(\mathbf{x}) = 0.$$

Par adjonction, le canonique de $X_{4,3}$ est donné par la restriction de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(1^4, 3^4)}(-12)$. Le système linéaire des cubiques de $\mathbf{P}(1^4, 3^4)$ définit un plongement $X_{4,3} \subseteq \mathbf{P}^{23}$, tel que le canonique de $X_{4,3}$ est la restriction de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{23}}(-4)$. Pour $S \subseteq \mathbf{P}^3$ la surface quartique définie par (3.26.1), l'extension $v_3(S) \subseteq \mathbf{P}^{19}$ de $v_3(C) \subseteq \mathbf{P}^{18}$ est la section de $X_{4,3} \subseteq \mathbf{P}^{23}$ par les quatre hyperplans correspondant aux cubiques (3.26.3) de $\mathbf{P}(1^4, 3^4)$.

En conclusion, la variété de Fano $X_{4,3} \subseteq \mathbf{P}^{23}$ de dimension 6 et d'indice 4 est l'extension universelle de $v_3(C) \subseteq \mathbf{P}^{18}$. Nous verrons en (3.30) qu'il existe des vraies fausses surfaces $K3$ extensions de $v_3(C) \subseteq \mathbf{P}^{18}$ ne correspondant pas à des quartiques de \mathbf{P}^3 .

Extensions des courbes lisses sur un éclatement du plan

Le théorème (3.7) (en fait seulement l'unicité de l'intégrale d'un ruban) nous a également permis de démontrer dans [5] une conjecture de Wahl dans un grand nombre de cas. C'est l'occasion de donner un exemple (bien connu) de vraie-fausse surface $K3$.

(3.27) Théorème. ([5, Prop. 9.5], voir [Wah97, p. 80]). *Soit S une surface obtenue en éclatant le plan projectif. Alors pour toute courbe lisse $C \subseteq S$ de genre $g \geq 11$, on a*

$$\text{corg}(\Phi_C) \geq h^0(S, -K_S).$$

Pour les sextiques et quintiques planes, de genres 10 et 6 respectivement, voir (3.31) ci-dessous.

(3.28) Exemple. Soit C^b une courbe plane ayant pour seules singularités des points doubles ordinaires, tous situés sur une cubique lisse T , et telle que la normalisation $C \rightarrow C^b$ a genre $g \geq 3$ et n'est pas hyperelliptique. Soit $S' \rightarrow \mathbf{P}^2$ l'éclatement de tous les points $C^b \cap T$. La transformée stricte de C^b dans S' est isomorphe à C (et nous l'appellerons donc C), et disjointe de la transformée stricte \hat{T} de T , qui est un diviseur anticanonique de S' . Le système linéaire $|C|$ se restreint sur C au système canonique K_C (par adjonction, puisque $C \sim C + K_{S'} + \hat{T}$ et $C \cap \hat{T} = \emptyset$) et définit une application $S' \dashrightarrow \mathbf{P}^g$ birationnelle sur son image S , qui contracte \hat{T} sur une singularité elliptique. La surface $S \subseteq \mathbf{P}^g$ est une vraie fausse surface $K3$. Si le nombre de points de l'intersection réduite $(C^b \cap T)_{\text{red}}$ est ≥ 19 , alors la singularité elliptique n'est pas lissifiable et donc S n'est pas une surface $K3$ dégénérée.

Idée de la preuve du théorème (3.27). Soit $\varepsilon : S \rightarrow \mathbf{P}^2$ l'éclatement définissant S . Pour une courbe C comme dans l'énoncé du théorème, C est la normalisation de son image C^b par ε , à laquelle on peut appliquer la même construction que dans l'exemple précédent, en prenant pour T l'image d'un diviseur anticanonique $T' \in |-K_S|$ (s'il n'y en a pas, l'inégalité qu'on veut démontrer est triviale). En faisant varier T' , on obtient une famille de dimension $h^0(-K_S) - 1$ d'extensions de C dans son modèle canonique, et on démontre que deux membres généraux de cette famille ne sont pas isomorphes. Par la partie unicité du théorème (3.7) on en déduit l'inégalité voulue (on traite à part et à la main les quelques cas où $\text{Cliff}(C) < 3$). \square

L'inégalité du théorème (3.27) peut être stricte, comme le montre l'exemple suivant.

(3.29) Exemple [Z.2]. Soit (S, L) une surface $K3$ de genre 2 telle que $\text{Pic}(S) = \mathbf{Z}.L$, et $C \in |6L|$ un membre général. La polarisation L définit un revêtement double $\pi : S \rightarrow \mathbf{P}^2$ ramifié au dessus d'une sextique lisse $B \subseteq \mathbf{P}^2$, et $\pi|_C$ est birationnelle sur son image C^b , une courbe de degré 12 et genre 37, partout tangente à B , satisfaisant aux propriétés suivantes : il existe deux courbes

A et D générales de degrés 6 et 3 respectivement, telles que C^b possède 18 nœuds aux points de $A \cap D$ et pas d'autre singularité, et les points de contact de C^b et B sont les points de l'intersection $A \cap B$ (tout ceci venant du fait que C^b appartient au pinceau engendré par $2A$ et $B + 2D$).

La courbe C a genre 37 et indice de Clifford 8 (par [GL87]), et ainsi C^b est redevable de l'exemple (3.28). Soit S' l'éclatement de \mathbf{P}^2 aux 18 points $A \cap D$. La transformée stricte de C^b est un modèle lisse de C dans S' , et on a $h^0(S', -K_{S'}) = 1$ puisque D est l'unique cubique contenant $A \cap D$. On a deux extensions distinctes du modèle canonique de C : la surface $K3$ S (plongée dans \mathbf{P}^{37} par $|6L|$), et l'image de S' dans \mathbf{P}^{37} par $|C|$. Par la partie unicité du théorème (3.7) ceci implique $\text{corg}(\Phi_C) \geq 2 > h^0(S', -K_{S'})$.

Pour (S, L) générale on en a fait l'égalité $\text{corg}(\Phi_C) = 2$, et l'extension universelle de C est l'image anticanonique de $Y = \mathbf{P}(1, 1, 1, 3)$, c.-à-d. le cône dans \mathbf{P}^{10} au dessus de la surface de Veronese $v_3(\mathbf{P}^2) \subseteq \mathbf{P}^9$, ré-immérgé dans \mathbf{P}^{38} par le système linéaire des quadriques. La surface rationnelle S' est la section de Y par le \mathbf{P}^{37} engendré par C et le point singulier de Y . La singularité elliptique obtenue pour S' a la multiplicité maximale pour une singularité elliptique lissifiable (S' est obtenue en éclatant 18 points).

Notons pour finir que 37 est le genre maximal d'une surface $K3$ extensible, comme on l'a déjà dit, et Y est l'un des deux solides de Fano de genre 37 d'après le résultat de [Pro05].

Dans l'exemple ci-dessous, je montre où se trouvent les surfaces extensions du type de l'exemple (3.28) dans les extensions universelles à la Totaro. Cet exemple est un proche parent du précédent.

(3.30) Exemple (suite de l'exemple (3.26)). Soit $C \subseteq \mathbf{P}^3$ une courbe lisse intersection complète d'une cubique et d'une quartique. Pour toute surface cubique lisse $F \subseteq \mathbf{P}^3$ contenant C , on peut construire des surfaces rationnelles extensions du modèle canonique de C en choisissant une courbe anticanonique sur F et en procédant comme dans l'exemple (3.28). Bien entendu ces surfaces rationnelles se retrouvent comme sections linéaires de l'extension universelle $X_{4,3} \subseteq \mathbf{P}^{23}$ construite dans l'exemple (3.26).

Dans les notations de l'exemple (3.26), considérons la section de $X_{4,3}$ par les quatre cubiques de $\mathbf{P}(1^4, 3^4)$,

$$g(\mathbf{x}) = \phi_1(\mathbf{y}) = \phi_2(\mathbf{y}) = \phi_3(\mathbf{y}) = 0,$$

où ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 sont trois formes linéaires indépendantes. Cette surface section est isomorphe à l'intersection complète

$$f(\mathbf{x}) + z\ell(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{dans } \mathbf{P}(1^4, 3),$$

où z est la coordonnée de poids 3, et $\ell(\mathbf{x}) = \sum a_i x_i$ avec (a_0, a_1, a_2, a_3) un générateur de $\ker(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$.

On vérifie que cette surface s'obtient en éclatant la surface cubique $F : (g = 0) \subseteq \mathbf{P}^3$ le long des points d'intersection de $C : (f = g = 0)$ avec la section hyperplane $T : (g = \ell = 0)$, puis en contractant la transformée stricte de T .

(3.31) Sextiques et quintiques planes. En utilisant des techniques similaires à celles décrites jusqu'ici, j'ai étudié les extensions des sextiques et quintiques planes dans leur modèle canonique, dans [Z.2] avec Ciliberto et [12] respectivement. L'intérêt de ces exemples réside dans le fait que leurs indices de Clifford (2 et 1 respectivement) sont trop petits pour pouvoir appliquer le théorème (3.7). On va voir d'ailleurs que ces courbes sont plus extensibles qu'indiqué par le théorème de Zak-Lvovski, qui ne s'applique pas non plus dans ces cas, puisque la condition " $\alpha < n$ " du théorème (3.3) n'est pas vérifiée (ceci prouve au passage que cet énoncé est optimal, et que la condition " $\alpha < n$ " n'est pas là "pour faire marcher la preuve").

Pour une sextique plane lisse $C \subseteq \mathbf{P}^2$, on a

$$\text{cork}(\Phi_C) = 10, \quad h^0(C, N_{C/\mathbf{P}^2}(-k)) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 2 \\ 0 & \text{si } k > 2 \end{cases}$$

(on considère C dans son plongement canonique dans \mathbf{P}^9). La fibre de l'application des modules c_{10} au dessus de $[C] \in \mathcal{M}_{10}$ est de dimension 10, constituée de doubles plans sextiques. On peut étendre C en une variété X de dimension 13; les surfaces sections linéaires de X contenant C forment une famille de dimension 11, dans laquelle chaque $K3$ étendant C apparaît une ∞^1 de fois. Ce cas est étudié dans [Z.2].

La situation est similaire pour les quintiques planes. Pour $C \subseteq \mathbf{P}^2$ de degré 5, les surfaces $K3$ générales étendant C sont des plans doubles ramifiés au dessus d'une sextique B partout tangente à $C + D$ où D est une droite. Ces surfaces $K3$ sont toutes singulières. Je décris la situation en détail dans [12].

Dans le même esprit, il serait intéressant d'étudier les extensions des courbes trigonales et tétragonales. Il me semble que c'est une entreprise relativement praticable.

Résultats analogues pour les surfaces $K3$

Par un "principe de la section hyperplane" on déduit du théorème (3.7) un énoncé analogue pour les surfaces $K3$.

(3.32) Théorème [5]. *Soit $S \subseteq \mathbf{P}^g$ une surface $K3$ de genre $g \geq 11$ et d'indice de Clifford $\text{Cliff}(S) \geq 3$. Notons $r = h^1(S, T_S(-1))$. Il existe une variété $X \subseteq \mathbf{P}^{g+r}$ ayant S comme section linéaire, et telle que pour tout solide $V \subseteq \mathbf{P}^g$ étendant S autre qu'un cône, il existe une unique section linéaire de X contenant S isomorphe à V .*

Preuve. Considérons un point de $\mathbf{P}H^1(S, T_S(-1))$, représenté par un ruban $\tilde{S} \subseteq \mathbf{P}^{g+1}$ ayant S comme section hyperplane. Soit C une section hyperplane générale de $S \subseteq \mathbf{P}^g$. Pour $H \subseteq \mathbf{P}^{g+1}$ hyperplan contenant C , l'intersection $H \cap \tilde{S}$ est un ruban sur C dont la classe d'isomorphisme appartient à $\mathbf{P}(\ker(\mathbb{T}\Phi_C))$. Ainsi le pinceau des hyperplans de \mathbf{P}^{g+1} contenant C définit un point de $\mathbf{P}(\ker(\mathbb{T}\Phi_C))/[2C_S]$, où $2C_S$ est le ruban sur C correspondant à son premier voisinage infinitésimal dans S (par abus de notation, j'écris $\mathbf{P}(\ker(\mathbb{T}\Phi_C))/[2C_S]$ pour l'espace projectif des droites de $\mathbf{P}(\ker(\mathbb{T}\Phi_C))$ contenant le point $[2C_S]$).

Ceci étant dit, soit $X \subseteq \mathbf{P}^{g+r}$ l'extension universelle de C ; on utilise ici le fait que $r = h^1(S, T_S(-1)) = \text{cork}(\Phi_C) - 1$, voir corollaire (3.14). La surface S est une section linéaire de X . Soit $\Lambda \in \mathbf{P}^{g+r}/\langle S \rangle$ un sous-espace linéaire de dimension $g + 1$ contenant S . Il découpe sur X un solide V contenant S , et le premier voisinage infinitésimal de S dans V détermine à son tour un point de $\mathbf{P}H^1(S, T_S(-1))$. On a ainsi une application composée

$$\mathbf{P}^{g+r}/\langle S \rangle \rightarrow \mathbf{P}H^1(S, T_S(-1)) \rightarrow \mathbf{P}(\ker(\mathbb{T}\Phi_C))/[2C_S].$$

Les espaces projectifs apparaissant dans cette composition ont tous la même dimension $r - 1$, et les deux morphismes composés sont tous les deux induits par des applications linéaires. On conclut en observant que l'universalité de X pour C implique la surjectivité de cette application composée, si bien que les deux flèches sont nécessairement des isomorphismes. \square

Ainsi sous les hypothèses du théorème, tout ruban sur S est intégrable en un solide V , et cette intégrale est unique. L'unicité permet de répondre à la question suivante posée par Beauville [Bea04].

Soit g un entier et $R = (R, \lambda)$ la donnée d'un réseau R et d'un élément distingué $\lambda \in R$ tel que $\lambda^2 = 2g - 2$. On considère l'application des modules

$$s_g^R : [V, S] \in \mathcal{FS}_g^R \mapsto [S] \in \mathcal{K}_g^R,$$

où \mathcal{FS}_g^R est l'espace de modules des paires (V, S) où V est une variété de Fano telle qu'il existe un isomorphisme de réseaux $R \cong \text{Pic}(V)$ envoyant λ sur $-K_V$, et \mathcal{K}_g^R est l'espace de modules des surfaces $K3$ R -polarisées. Beauville démontre que c'est un morphisme lisse et dominant, de dimension relative $b_3(V)/2$ au point (V, S) , et demande si cette application est étale lorsque $b_3(V) = 0$.

Nos résultats permettent de répondre à cette question par l'affirmative lorsque $g \geq 11$ et $\text{Cliff}(S, -K_V|_S) \geq 3$. En effet si $b_3(V) = 0$ alors $h^1(S, T_S(-1)) = 1$ donc il existe une unique classe d'isomorphisme de ruban sur S , et puisque l'intégrale de ce ruban est unique il existe un unique solide de Fano étendant S .

3.2 – Applications des modules pour les courbes sur les surfaces d'Enriques

Dans l'article [9] avec Ciro Ciliberto, Concettina Galati et Andreas L. Knutsen nous étudions les applications des modules relatives aux surfaces d'Enriques ; pour chacune de ces applications des modules nous calculons la dimension de ses fibres générales. Ces résultats sont en relation avec l'existence d'extensions des surfaces d'Enriques, mais nous ne sommes pas en mesure de donner une correspondance aussi précise que dans le cas des surfaces $K3$.

Une difficulté importante est que les surfaces d'Enriques ne viennent pas avec une polarisation préférée (contrairement par exemple aux surfaces $K3$ très génériques qui ont nombre de Picard $\rho = 1$), en conséquence de quoi il n'y a pas en général d'espace de modules irréductible des surfaces d'Enriques de genre g . Il faut donc au préalable disposer d'une classification des composantes irréductibles de ces espaces de modules. Nous avons obtenu une telle classification avec les mêmes co-auteurs dans l'article [Z.1]. Je présente ces résultats ici pour pouvoir énoncer correctement ceux de [9] bien que [Z.1] soit encore pour l'instant seulement une pré-publication.

Surfaces d'Enriques

Avant d'exposer nos résultats je voudrais présenter brièvement les surfaces d'Enriques. On pourrait un peu hâtivement penser qu'elles ne sont guère plus que des surfaces $K3$ spéciales. Je m'y suis moi-même trop longtemps laissé prendre, et je saisis ici le prétexte de souligner les difficultés spécifiques posées par l'étude des applications des modules dans le cas des surfaces d'Enriques pour mettre en avant certains aspects de la géométrie de ces surfaces que je trouve remarquables.

Le premier exemple d'une telle surface a été construit par Enriques pour démontrer qu'il existe des surfaces avec $p_g = q = 0$ ²¹ qui ne sont pas rationnelles. Les surfaces d'Enriques sont les surfaces complètes lisses S telles que le diviseur bi-canonique $2K_S$ est trivial mais le diviseur canonique K_S ne l'est pas. En effet, une telle surface a les invariants $p_g(S) = q(S) = 0$, et n'est pas rationnelle.

(3.33) Sextiques d'Enriques. L'exemple d'Enriques est le suivant : soit $T \subseteq \mathbf{P}^3$ l'ensemble des arêtes d'un tétraèdre²², soit S^b une surface sextique ayant chacune des six droites de T

21. je rappelle que pour une surface lisse S , $p_g(S) = h^0(S, \Omega_S^2)$ est le *genre géométrique* de S , et $q(S) = h^0(S, \Omega_S^1)$ est l'*irrégularité* de S .

22. on prendra pour T la réunion des six droites joignant deux parmi les quatre points $(1 : 0 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0 : 0)$, $(0 : 0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 0 : 1)$.

comme courbe double ordinaire²³, et lisse en dehors de T , et soit $\varepsilon : S \rightarrow S^\flat$ la normalisation de S^\flat . La formule d'adjonction pour les surfaces de l'espace \mathbf{P}^3 à singularités ordinaires donne l'égalité

$$K_S = \nu^* K_{S^\flat} - \bar{T} = \nu^*(2H) - \bar{T},$$

où $\bar{T} = \nu^{-1}(T) \subseteq S$ et H est la classe d'un hyperplan de \mathbf{P}^3 (ces formules sont de la même nature que celles données au (1.8)). On en déduit par formule de projection les deux identifications

$$H^0(S, K_S) \cong H^0(\mathbf{P}^3, \mathcal{I}_T(2H)) \quad \text{et} \quad H^0(S, 2K_S) \cong H^0(\mathbf{P}^3, \mathcal{I}_T^2(4H))$$

qui donnent finalement $2K_S \sim 0$ et $K_S \not\sim 0$ puisqu'il n'y a aucune quadrique de \mathbf{P}^3 qui contient T , et la seule quartique contenant doublement T est le tétraèdre lui-même, dont le tiré-en-arrière sur S découpe $2\bar{T}$. Il reste à voir que $q = 0$, je renvoie à [Bea78, Exer. VIII.15] pour des indications.

(3.34) Systèmes linéaires de courbes sur les surfaces d'Enriques. Soit S une surface d'Enriques et $C \subseteq S$ une courbe lisse de genre g . On a $C^2 = 2g - 2$ par la formule d'adjonction, et ainsi C est big & nef si $g > 1$. La formule de Riemann–Roch donne $\chi(\mathcal{O}_S(C)) = g$, et si $g > 1$ il s'ensuit que $|C| \cong \mathbf{P}^{g-1}$. Dans la plupart des cas (voir (3.37)) ce système linéaire est très ample, et les sections hyperplanes de S dans le modèle projectif induit sont des courbes Prym-canoniques (C, η_C) , c'est-à-dire des courbes plongées par le système linéaire complet $|K_C + \eta_C|$ où η_C est un diviseur non-trivial de 2-torsion sur C , où η_C est la restriction de K_S à C . Ceci contraste avec les surfaces $K3$, dont les sections hyperplanes sont des courbes canoniques.

Si $g = 1$, on a les deux cas possibles

$$h^0(S, \mathcal{O}_S(C)) = \begin{cases} 1 & \text{si } K_S|_C \not\sim 0 \\ 2 & \text{si } K_S|_C \sim 0 \end{cases}$$

(si $g > 1$ on a toujours $K_S|_C \not\sim 0$ comme on l'a vu ci-dessus). Dans le premier cas C est une courbe elliptique isolée, et dans le second elle bouge dans un pinceau de courbes elliptiques. Cette dichotomie est la même que celle décrite à la section §1.5 pour les courbes nodales. Si C est une courbe elliptique isolée, alors $2C$ est un diviseur d'auto-intersection 0 qui bouge dans un pinceau, autrement dit $2C$ est une fibre double d'une fibration elliptique sur S ; en fait toute fibration elliptique sur S est un système linéaire $|2C|$ avec C courbe elliptique isolée, et possède exactement deux fibres doubles qui correspondent aux deux courbes elliptiques isolées linéairement équivalentes à C et $C + K_S$ respectivement.

Enfin notons qu'une surface d'Enriques générale ne possède aucune courbe rationnelle, autrement dit aucune des classes d'auto-intersection -2 dans son réseau de Picard n'est effective. À nouveau cette situation est à comparer à celle des surfaces $K3$, sur lesquelles toute courbe de genre g se déforme en dimension g , et il existe typiquement une infinité dénombrable de courbes rationnelles singulières (en fait tout-le-temps, comme on le sait désormais par [CGL]).

(3.35) Groupe de Picard. Soit S une surface d'Enriques. Les annulations $q(S) = 0$ et $p_g(S) = 0$ disent respectivement que le groupe de Picard de S est un sous-groupe de $H^2(S, \mathbf{Z})$, et que toutes les classes de cohomologie dans $H^2(S, \mathbf{Z})$ sont algébriques, c'est-à-dire proviennent d'un fibré en droites sur S . Ceci se voit avec la suite exacte

$$H^1(S, \mathcal{O}_S) \rightarrow \text{Pic}(S) \rightarrow H^2(S, \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathcal{O}_S)$$

23. autrement dit, pour tout $\{i \neq j\} \subseteq \{0, 1, 2, 3\}$ l'équation définissant S^\flat doit être en un point général de la droite $x_i = x_j = 0$ analytiquement localement équivalente à $Q(x_i, x_j) = 0$, Q forme quadratique de rang 2.

donnée par la suite exacte exponentielle. On en déduit que toutes les surfaces d'Enriques ont le même groupe de Picard, et qu'elles sont toutes algébriques. À nouveau ceci contraste avec la situation des surfaces $K3$.

Pour toute surface d'Enriques S on a

$$H^2(S, \mathbf{Z}) \cong \Lambda_{\text{Enr}} \oplus \mathbf{Z}/2,$$

où Λ_{Enr} est le réseau unimodulaire $U \oplus E_8(-1)$, et $\mathbf{Z}/2$ est engendré par K_S qui est l'unique classe de torsion. En particulier le groupe de Picard d'une surface d'Enriques est de rang 10, ce qui est une source majeure de complications pratiques pour l'étude de ces surfaces.

Le cône effectif de S est engendré par les classes isotropes (pour la forme d'intersection), qui coïncide avec le cône nef si S ne contient pas de (-2) -courbe.

Modules des surfaces d'Enriques polarisées

Pour pouvoir étudier les applications des modules des surfaces d'Enriques il convient en premier lieu de disposer d'espaces de modules pour les surfaces d'Enriques polarisées. Avec les mêmes collaborateurs nous avons avant [9] donné une description utilisable en pratique de ces espaces de modules en termes de décompositions isotropes simples (voir plus loin) dans l'article [Z.1], qui a été complété après [9] par [Knu20]. Pour des raisons éditoriales notre article [Z.1] n'a pas encore été accepté par une revue à comité de lecture, je me limiterai donc à énoncer les résultats nécessaires au travail présenté [9].

(3.36) Constructions d'espaces de modules. Il existe un espace de modules \mathcal{E} paramétrant les surfaces d'Enriques toutes nues, construit comme quotient d'un domaine symétrique borné en utilisant le fait que toute surface d'Enriques est le quotient d'une surface $K3$ par une involution sans point fixe. Il est irréductible de dimension 10, et Kondō a démontré qu'il est rationnel [Kon94].

Il existe d'autre part par la théorie de Viehweg pour tout $g \geq 2$ des variétés quasi-projectives \mathcal{E}_g paramétrant les surfaces d'Enriques polarisées de genre g , c.-à-d. les paires (S, L) où S est une surface d'Enriques, et L un fibré ample sur S tel que $L^2 = 2g - 2$. Ces espaces viennent avec un morphisme d'oubli $\mathcal{E}_g \rightarrow \mathcal{E}$, dont la différentielle au point (S, L) est donnée par [Ser06, Prop. 3.3.12], ce qui permet de voir que les morphismes d'oubli sont étales puisque $p_g(S) = q(S) = 0$.

Enfin il existe des espaces de modules $\mathcal{E}_g^{\text{num}}$ paramétrant les surfaces d'Enriques numériquement polarisées, c'est-à-dire les paires (S, \bar{L}) où $\bar{L} \in H^2(S, \mathbf{R})$ est la classe numérique d'un fibré ample. Ils ont été construits par Gritsenko et Hulek [GH16], en considérant des variétés modulaires orthogonales. Les composantes irréductibles de ces espaces correspondent aux orbites du réseau d'Enriques Λ_{Enr} sous l'action du groupe orthogonal. Il y a un revêtement double étale $\mathcal{E}_g^{\text{num}} \rightarrow \mathcal{E}_g$ correspondant au fait que chaque classe numérique \bar{L} correspond aux deux fibrés L et $L + K_S$.

(3.37) L'invariant ϕ . Pour L fibré en droites sur une surface d'Enriques, on a l'invariant classique suivant :

$$(3.37.1) \quad \phi(L) = \min\{(E \cdot L) : E \text{ classe isotrope effective}\}.$$

Puisque le cône effectif est engendré par des classes isotropes, si L est ample on a $\phi(L) > 0$. D'autre part on a $\phi(L)^2 \leq L^2$ ²⁴, voir [CoDo89].

²⁴. il semble particulièrement hasardeux de vouloir en déduire $\phi(L) \leq L$!

Pour donner un premier sens à cet invariant, on a les faits suivants pour lesquels je renvoie à [CoDo89] :

- (i) $\phi(L) = 1$ si et seulement si $|L|$ a des points base, ce qui arrive si et seulement si toutes les courbes lisses de $|L|$ sont hyperelliptiques ;
- (ii) si $\phi(L) = 2$ alors $|L|$ définit un morphisme birationnel sur une surface $S' \subseteq \mathbf{P}^{g-1}$ possédant des droites doubles et éventuellement des singularités canoniques, sauf dans un nombre fini de cas exceptionnels où le morphisme défini par $|L|$ est de degré 2 ou 4 ;
- (iii) si $\phi(L) \geq 3$ alors $|L|$ définit un morphisme birationnel sur une surface $S' \subseteq \mathbf{P}^{g-1}$ possédant au plus des singularités canoniques.

On définit des espaces de modules $\mathcal{E}_{g,\phi}$ en considérant les composantes de \mathcal{E}_g dont les membres (S, L) vérifient $\phi(L) = \phi$. Dans la plupart des cas ces espaces ne sont toujours pas irréductibles.

(3.37.2) *Exemple.* Les sextiques d'Enriques sont les membres de l'espace de modules $\mathcal{E}_{4,2}$ qui à titre exceptionnel est irréductible.

(3.38) Décompositions isotropes simples. Nous avons introduit cette notion dans l'article [Z.1]. Soit S une surface d'Enriques et L un fibré en droites effectifs tel que $L^2 \geq 0$. Une *décomposition isotrope simple* de L est une écriture

$$L \sim a_1 E_1 + \cdots + a_n E_n + \varepsilon K_S$$

où les E_i sont des diviseurs isotropes effectifs primitifs (c'est-à-dire indivisibles dans $\text{Pic}(S)$), $n \leq 10$, les a_i sont des entiers strictement positifs, $\varepsilon \in \{0, 1\}$, et la condition suivante est vérifiée (quitte à permuter les E_i) :

$$\begin{cases} \text{ou bien } E_i \cdot E_j = 1 \text{ pour tout } i \neq j, \text{ et } n \neq 9; \\ \text{ou bien } E_1 \cdot E_2 = 2 \text{ et } E_i \cdot E_j = 1 \text{ sinon } (i \neq j), \text{ et } n \neq 10; \\ \text{ou bien } E_1 \cdot E_2 = E_1 \cdot E_3 = 2 \text{ et } E_i \cdot E_j = 1 \text{ sinon } (i \neq j). \end{cases}$$

(Les conditions $n \neq 9$ et $n \neq 10$ dans les deux premiers cas servent à pouvoir caractériser la divisibilité par 2 dans $\text{Num}(S)$ de la classe \bar{L} par la parité des coefficients a_i , qui est la condition permettant de distinguer si une composante irréductible de $\mathcal{E}_{g,\phi}$ donne lieu à une ou deux composantes de $\mathcal{E}_{g,\phi}^{\text{num}}$; nous n'évoquerons pas ici cet aspect des choses).

Dans [Z.1] nous démontrons que tout L effectif tel que $L^2 \geq 0$ possède une décomposition isotrope simple. Deux fibrés en droites L et L' sur S et S' respectivement ont le *même type de décomposition isotrope simple* s'il existe des décompositions isotropes simples

$$L \sim a_1 E_1 + \cdots + a_n E_n + \varepsilon K_S \quad \text{et} \quad L' \sim a_1 E'_1 + \cdots + a_n E'_n + \varepsilon K_{S'}$$

tels que $E_i \cdot E_j = E'_i \cdot E'_j$ pour tout i, j .

En général un fibré en droites possède plusieurs décompositions isotropes simples de types différents, mais nous démontrons dans [Z.1] que la relation sur $\mathcal{E}_{g,\phi}$

$$(S, L) \simeq (S', L') \iff L \text{ et } L' \text{ ont le même type de décomposition isotrope simple}$$

est une relation d'équivalence.

(3.39) Théorème [Z.1],[Knu20]. *L'ensemble des composantes irréductibles de $\mathcal{E}_{g,\phi}$ est en bijection avec les classes d'équivalence de la relation \simeq définie ci-dessus.*

Dans [Z.1] nous identifions de nombreuses séries infinies de composantes irréductibles en termes de types de décomposition, pour lesquelles nous démontrons qu'elles sont unrationnelles

(ou seulement uniréglées dans certains cas); en particulier nous obtenons des composantes de $\mathcal{E}_{g,\phi}$ avec g et ϕ arbitrairement grands. Gritsenko et Hulek [GH16] ont démontré d'autre part qu'une infinité de composantes irréductibles est de type général. La preuve complète du théorème ci-dessus a finalement été donnée par Knutsen dans [Knu20].

(3.40) Liste des composantes irréductibles. Un aspect intéressant de notre approche par les décompositions isotropes simples est qu'elle permet d'écrire de manière algorithmique la liste complète de toutes les décompositions possibles (plus exactement, de toutes les classes d'équivalence possible pour la relation \simeq) dans un intervalle numérique donné pour les invariants g et ϕ . Notons au passage que la donnée d'une décomposition isotrope simple d'une polarisation L prescrit le genre de L mais aussi l'invariant $\phi(L)$.²⁵

Je vais donner la liste de toutes les composantes irréductibles de $\mathcal{E}_{g,\phi}$ pour tout g si $\phi \leq 2$ d'une part, et de $\mathcal{E}_{g,\phi}$ pour $\phi \geq 3$ et $g \leq 17$ d'autre part, puisque j'en aurai ensuite besoin pour énoncer les résultats obtenus dans l'article [9]. Tous ces résultats sont démontrés dans [Z.1].

(3.40.1) *Notation.* Pour écrire les décompositions isotropes simples, on convient que pour tout i, j , les diviseurs $E_i, E_j, E_{i,j}$ sont effectifs isotropes primitifs, et satisfont aux relations

$$\begin{cases} E_i \cdot E_j = 1 & \text{si } i \neq j \\ E_{i,j} \cdot E_i = E_{i,j} \cdot E_j = 2 \\ E_{i,j} \cdot E_k = 1 & \text{si } k \neq i, j. \end{cases}$$

Les différentes composantes de $\mathcal{E}_{g,\phi}$ à invariants g, ϕ fixés sont numérotées par des chiffres romains en exposant, auxquels on ajoute un signe ' \pm ' lorsque tous les coefficients de la décomposition sont paires; dans ce dernier cas, la composante notée '+' (resp. '-') correspond au cas $\varepsilon = 0$ (resp. $\varepsilon = 1$) dans la notation de (3.38). Si l'un au moins des a_i est impair, alors on peut toujours supposer $\varepsilon = 0$ quitte à remplacer l'un des E_i par $E_i + K_S$.

Avant de donner les listes, il est sans doute bon d'illustrer ces notations par un exemple, classiquement connu.

(3.40.2) *Exemple.* L'espace de modules $\mathcal{E}_{5,2}$ a trois composantes irréductibles :

- $\mathcal{E}_{5,2}^I$ correspond aux surfaces d'Enriques polarisées (S, L) telles que L peut s'écrire $2E_1 + E_{1,2}$ dans la notation (3.40.1) : $E_1 \cdot E_{1,2} = 2$; le système linéaire $|L|$ donne un modèle birationnel de S comme une surface de degré 8 dans \mathbf{P}^4 possédant deux droites doubles disjointes, images respectivement de E_1 et $E_1 + K_S$.
- $\mathcal{E}_{5,2}^{II+}$ correspond à la décomposition $2E_1 + 2E_2$, où $E_1 \cdot E_2 = 1$ selon la notation (3.40.1); $|L|$ définit un revêtement double d'une surface de Del Pezzo dans \mathbf{P}^4 , possédant un unique quadrangle anticanonique (et quatre points doubles ordinaires aux sommets de ce quadrangle), dont les côtés sont les images respectives de $E_1, E_1 + K_S, E_2, E_2 + K_S$.
- $\mathcal{E}_{5,2}^{II-}$ correspond à la décomposition $2E_1 + 2E_2 + K_S$; dans ce cas $|L|$ donne un modèle birationnel de S comme une surface de degré 8 dans \mathbf{P}^4 , possédant quatre droites doubles formant un quadrangle, images de $E_1, E_1 + K_S, E_2, E_2 + K_S$ respectivement.

(3.40.3) *Listes des composantes pour $\phi = 1$.* L'espace de modules $\mathcal{E}_{g,1}$ est irréductible et unirationnel, correspondant à la décomposition $(g-1)E_1 + E_2$.

²⁵ cependant l'invariant $\phi(L)$ n'est pas nécessairement calculé par l'un des E_i apparaissant dans la décomposition (c'est-à-dire, le minimum de la définition (3.37.1) n'est pas nécessairement réalisé par l'un des E_i). On peut néanmoins toujours s'arranger pour trouver une décomposition telle que $\phi(L) = L \cdot E_i$ pour un certain E_i de la décomposition.

(3.40.4) *Listes des composantes pour $\phi = 2$.*

- Pour g pair (resp. $g = 3$), $\mathcal{E}_{g,2}$ est irréductible et unirationnel, correspondant à la décomposition $\frac{g-2}{2}E_1 + E_2 + E_3$ (resp. $E_1 + E_{1,2}$).
- Pour $g > 3$ impair tel que $g \equiv 3 \pmod{4}$, $\mathcal{E}_{g,2}$ a les deux composantes irréductibles unirationnelles suivantes :
 - ◇ $\mathcal{E}_{g,2}^I$, correspondant à la décomposition $\frac{g-1}{2}E_1 + E_{1,2}$;
 - ◇ $\mathcal{E}_{g,2}^{II}$, correspondant à la décomposition $\frac{g-1}{2}E_1 + 2E_2$.
- Pour $g > 3$ impair tel que $g \equiv 1 \pmod{4}$, $\mathcal{E}_{g,2}$ a les trois composantes irréductibles unirationnelles suivantes :
 - ◇ $\mathcal{E}_{g,2}^I$, correspondant à la décomposition $\frac{g-1}{2}E_1 + E_{1,2}$;
 - ◇ $\mathcal{E}_{g,2}^{II+}$, correspondant à la décomposition $\frac{g-1}{2}E_1 + 2E_2$;
 - ◇ $\mathcal{E}_{g,2}^{II-}$, correspondant à la décomposition $\frac{g-1}{2}E_1 + 2E_2 + K_S$.

(3.40.5) *Liste des composantes pour $\phi \geq 3$ et $g \leq 17$.*

g	ϕ	comp.	type décomposition	g	ϕ	comp.	type décomposition
6	3	$\mathcal{E}_{6,3}$	$E_1 + E_2 + E_{1,2}$	14	3	$\mathcal{E}_{14,3}$	$4E_1 + E_2 + E_{1,3}$
7	3	$\mathcal{E}_{7,3}$	$E_1 + E_2 + E_3 + E_4$	14	4	$\mathcal{E}_{14,4}^I$	$2E_1 + 2E_2 + E_3 + E_4$
8	3	$\mathcal{E}_{8,3}$	$2E_1 + E_2 + E_{1,3}$	14	4	$\mathcal{E}_{14,4}^{II}$	$3E_{1,2} + E_1 + E_2$
9	3	$\mathcal{E}_{9,3}^I$	$2E_1 + E_2 + E_{1,2}$	15	3	$\mathcal{E}_{15,3}^I$	$4E_1 + 2E_2 + E_3$
9	3	$\mathcal{E}_{9,3}^{II}$	$2E_1 + 2E_2 + E_3$	15	3	$\mathcal{E}_{15,3}^{II}$	$4E_1 + E_2 + E_{1,2}$
9	4	$\mathcal{E}_{9,4}^\pm$	$2(E_1 + E_{1,2}) + \varepsilon K_S$	15	4	$\mathcal{E}_{15,4}^I$	$2E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5$
10	3	$\mathcal{E}_{10,3}^I$	$2E_1 + E_2 + E_3 + E_4$	15	4	$\mathcal{E}_{15,4}^{II}$	$3E_1 + 2E_2 + E_{1,3}$
10	3	$\mathcal{E}_{10,3}^{II}$	$3(E_1 + E_2)$	15	5	$\mathcal{E}_{15,5}$	$2E_1 + E_2 + 2E_{1,2}$
10	4	$\mathcal{E}_{10,4}$	$2E_{1,2} + E_1 + E_2$	16	3	$\mathcal{E}_{16,3}^I$	$4E_1 + E_2 + E_3 + E_4$
11	3	$\mathcal{E}_{11,3}$	$3E_1 + E_2 + E_{1,3}$	16	3	$\mathcal{E}_{16,3}^{II}$	$5E_1 + 3E_2$
11	4	$\mathcal{E}_{11,4}$	$E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5$	16	4	$\mathcal{E}_{16,4}^I$	$3E_1 + 3E_2 + E_3$
12	3	$\mathcal{E}_{12,3}^I$	$3E_1 + 2E_2 + E_3$	16	4	$\mathcal{E}_{16,4}^{II}$	$3E_1 + E_2 + E_3 + E_{1,4}$
12	3	$\mathcal{E}_{12,3}^{II}$	$3E_1 + E_2 + E_{1,2}$	16	5	$\mathcal{E}_{16,5}$	$E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 + E_6$
12	4	$\mathcal{E}_{12,4}$	$2E_1 + E_2 + E_3 + E_{1,4}$	17	3	$\mathcal{E}_{17,3}$	$5E_1 + E_2 + E_{1,3}$
13	3	$\mathcal{E}_{13,3}^I$	$3E_1 + E_2 + E_3 + E_4$	17	4	$\mathcal{E}_{17,4}^I$	$3E_1 + 2E_2 + 2E_3$
13	3	$\mathcal{E}_{13,3}^{II}$	$4E_1 + 3E_2$	17	4	$\mathcal{E}_{17,4}^{II}$	$3E_1 + 2E_2 + E_{1,2}$
13	4	$\mathcal{E}_{13,4}^I$	$2E_1 + 2E_2 + E_{1,2}$	17	4	$\mathcal{E}_{17,4}^{III\pm}$	$2(2E_1 + E_{1,2}) + \varepsilon K_S$
13	4	$\mathcal{E}_{13,4}^{II\pm}$	$2(E_1 + E_2 + E_3) + \varepsilon K_S$	17	4	$\mathcal{E}_{17,4}^{IV\pm}$	$4(E_1 + E_2) + \varepsilon K_S$
13	4	$\mathcal{E}_{13,4}^{III}$	$3E_1 + 2E_{1,2}$	17	5	$\mathcal{E}_{17,5}$	$2E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_{1,5}$

Modules des courbes sur les surfaces d'Enriques

Pour tout g, ϕ , on note $\mathcal{E}_{g,\phi}$ l'espace de modules des paires (S, C) où C est une courbe lisse sur S telle que $(S, \mathcal{O}_S(C)) \in \mathcal{E}_{g,\phi}$; c'est un ouvert dense d'un fibré en \mathbf{P}^{g-1} sur $\mathcal{E}_{g,\phi}$. On note d'autre part \mathcal{R}_g l'espace de modules des courbes Prym de genre g , c'est-à-dire les paires (C, η) où C est une courbe de genre g et η un fibré inversible non-trivial de 2-torsion sur C ; \mathcal{R}_g est un revêtement étale irréductible de degré $2^{2g} - 1$ de \mathcal{M}_g . L'application des modules dont il est

question dans cette partie est

$$\chi_{g,\phi} : \mathcal{EC}_{g,\phi} \rightarrow \mathcal{R}_g$$

qui à (S, C) associe $(C, K_S|_C)$.

Pour étudier ces applications des modules de manière raisonnable, il faut distinguer les différentes composantes irréductibles de $\mathcal{EC}_{g,\phi}$, qui correspondent à celles de $\mathcal{E}_{g,\phi}$, qui ont été décrites dans la partie précédente suivant les résultats de notre article [Z.1]. En particulier dans la suite j'utiliserai librement les listes données en (3.40). Lorsque une composante irréductible de $\mathcal{E}_{g,\phi}$ est indiquée par une décoration en exposant, nous indiquerons les composantes correspondantes de $\mathcal{EC}_{g,\phi}$ et $\chi_{g,\phi}$ par la même décoration.

Nous avons trouvé pour toute composante irréductible de $\mathcal{E}_{g,\phi}$ la dimension de la fibre générale de l'application des modules correspondante.

(3.41) Théorème [9]. *Soit $\phi \geq 3$ (et donc $g \geq 6$). L'application des modules $\chi_{g,\phi} : \mathcal{E}_{g,\phi} \rightarrow \mathcal{R}_g$ est génériquement injective sur toute composante irréductible de $\mathcal{EC}_{g,\phi}$ n'apparaissant pas dans la liste ci-dessous ; pour ces dernières, nous donnons la dimension de la fibre générale de l'application des modules correspondante.*

comp.	$\mathcal{EC}_{7,3}$	$\mathcal{EC}_{9,3}^{II}$	$\mathcal{EC}_{9,4}^+$	$\mathcal{EC}_{9,4}^-$	$\mathcal{EC}_{10,3}^{II}$	$\mathcal{EC}_{13,3}^{II}$	$\mathcal{EC}_{13,4}^{II+}$	$\mathcal{EC}_{13,4}^{II-}$	$\mathcal{EC}_{17,4}^{IV+}$	$\mathcal{EC}_{17,4}^{IV-}$
fib.dim.	1	1	3	0	2	1	1	0	1	0

Les énoncés pour les cas $\phi = 1$ et 2 sont donnés plus loin. Auparavant, je vais donner les idées de la preuve du théorème ci-dessus. Le point clef est de calculer pour toute composante \mathcal{EC}' de $\mathcal{EC}_{g,\phi}$ la dimension de $H^1(S, T_S(-C))$ pour (S, C) général dans \mathcal{EC}' , ce qui donne la dimension de la fibre générale de l'application des modules χ' correspondant à \mathcal{EC}' , puisque $H^1(S, T_S(-C))$ est le noyau de la différentielle de χ' au point (S, C) .

En fait, on passe pour ce calcul par la surface $K3$ de genre $2g - 1$ revêtement double de S . On note \tilde{S} cette surface $K3$, et \tilde{C} la courbe image inverse de C dans \tilde{S} . On a

$$(3.41.1) \quad H^1(\tilde{S}, T_{\tilde{S}}(-\tilde{C})) = H^1(S, T_S(-C)) \oplus H^1(S, T_S(-C - K)).$$

Nous développons [9, §5] une série de lemmes *ad hoc* permettant dans la plupart des cas le calcul de $h^1(\tilde{S}, T_{\tilde{S}}(-\tilde{C}))$ à partir de la décomposition isotrope simple de $\mathcal{O}_S(C)$. Cette partie de notre travail, bien que fondamentale, est particulièrement technique et il vaut mieux renvoyer directement à la source le lecteur qui voudrait en savoir plus. Le calcul explicite des h^1 , lui aussi très technique, est effectué au [9, §6].

Lorsqu'on trouve $h^1(\tilde{S}, T_{\tilde{S}}(-\tilde{C})) = 0$, l'application des modules χ' est génériquement injective et non pas seulement génériquement finie. En effet on peut alors appliquer les résultats de la section 3.1 au couple (\tilde{S}, \tilde{C}) , puisque si $\phi \geq 3$ alors \tilde{C} est de genre $2g - 1 \geq 11$ et d'indice de Clifford au moins 3. L'annulation du $H^1(T_{\tilde{S}}(-\tilde{C}))$ dit alors que \tilde{S} est l'unique surface extension de \tilde{C} dans son modèle canonique, ce qui donne l'injectivité de χ' au dessus de $(C, K_S|_C)$.

Lorsqu'on trouve $h^1(\tilde{S}, T_{\tilde{S}}(-\tilde{C})) > 0$ (on notera cet entier \tilde{h} ci-dessous), il faut enquêter un peu plus pour savoir comment répartir \tilde{h} entre les deux termes à droite de (3.41.1). Ceci se produit pour les composantes indiquées dans le tableau ci-dessus. Voyons brièvement comment régler la question dans chacun des cas.

— $\mathcal{EC}_{7,3}$: on trouve $\tilde{h}^1 \leq 2$. L'application $\chi_{7,3}$ a fibre générale de dimension > 0 car les surfaces $(S, L) \in \mathcal{E}_{7,3}$ sont extensibles à un solide d'Enriques–Fano (voir plus loin la partie consacrée à cet aspect), donc $h^1(T_S(-C)) > 0$ (pour $[C] \in |L|$ lisse). D'autre part pour $(S, L) \in \mathcal{E}_{7,3}$, on a également $(S, L + K_S) \in \mathcal{E}_{7,3}$, donc $h^1(T_S(-C - K)) > 0$ pour la même raison. Ceci donne comme unique possibilité

$$h^1(T_S(-C)) = h^1(T_S(-C - K)) = 1.$$

- $\mathcal{EC}_{9,3}^{II}$, $\mathcal{EC}_{10,3}^{II}$, $\mathcal{EC}_{13,3}^{II}$: on trouve $\tilde{h}^1 = 2, 4, 2$ respectivement. Pour (S, L) appartenant à l'une de ces composantes, $(S, L + K_S)$ est dans la même composante, donc $h^1(T_S(-C)) = h^1(T_S(-C - K)) = \frac{1}{2}\tilde{h}^1$ avec les mêmes notations que dans le cas précédent.
- $\mathcal{EC}_{9,4}^{\pm}$: $\tilde{h}^1 = 3$. Dans ce cas un raffinement opportun de notre arsenal cohomologique permet d'obtenir $h^1(T_S(-C)) = 3$ et $h^1(T_S(-C - K_S)) = 0$ pour $(S, C) \in \mathcal{EC}_{9,4}^+$.
- $\mathcal{EC}_{13,4}^{II\pm}$: $\tilde{h}^1 \leq 1$. Dans le cas '+' il existe un solide d'Enriques–Fano, donc $h^1(T_S(-C)) > 0$ pour $(S, C) \in \mathcal{EC}_{13,4}^{II+}$, ce qui implique finalement $h^1(T_S(-C)) = 1$ et $h^1(T_S(-C - K_S)) = 0$.
- $\mathcal{EC}_{17,4}^{IV\pm}$: $\tilde{h}^1 = 1$. À nouveau il existe un solide d'Enriques–Fano dans le cas '+', ce qui permet de conclure comme dans le cas précédent.

(3.42) Théorème [9]. *Soit $\phi = 2$, et donc $g \geq 3$. Si $g \geq 10$, l'application des modules $\chi_{g,2} : \mathcal{EC}_{g,2} \rightarrow \mathcal{R}_g$ est génériquement finie sur toutes les composantes irréductibles de $\mathcal{EC}_{g,2}$. Pour $g \leq 9$, la dimension de la fibre générale de $\chi_{g,2}$ sur chacune des composantes est donnée dans le tableau ci-dessous.*

comp.	$\mathcal{EC}_{9,2}^I$	$\mathcal{EC}_{9,2}^{II+}$	$\mathcal{EC}_{9,2}^{II-}$	$\mathcal{EC}_{8,2}$	$\mathcal{EC}_{7,2}^I$	$\mathcal{EC}_{7,2}^{II}$	$\mathcal{EC}_{6,2}$	$\mathcal{EC}_{5,2}^I$	$\mathcal{EC}_{5,2}^{II+}$	$\mathcal{EC}_{5,2}^{II-}$	$\mathcal{EC}_{4,2}$	$\mathcal{EC}_{3,2}$
fib. dim.	0	2	1	0	(*) 1	3	2	3	6	4	4	6

(3.42.1) *Avertissement.* Le cas $\mathcal{EC}_{7,2}^I$ indiqué par (*) dans le tableau nécessite les résultats de [Y.1] qui sont sujets à une correction en cours, voir l'avertissement (3.56).

Les cas $g \geq 8$ pair, $g = 3, 4, 6$, et la composante $\mathcal{EC}_{5,2}^I$ s'obtiennent directement avec nos techniques cohomologiques mentionnées sous les résultats pour $\phi \geq 3$.

Pour $g \geq 5$ impair, les composantes $\mathcal{EC}_{g,2}^{II}$ (si $g \equiv 3 \pmod{4}$) et $\mathcal{EC}_{g,2}^{II\pm}$ (si $g \equiv 3 \pmod{4}$) correspondent aux polarisations de type $\frac{g-1}{2}E_1 + 2E_2 (+\varepsilon K_S)$, qui mettent en œuvre seulement deux E_i . Ils peuvent donc s'étudier en termes du morphisme $\tilde{S} \rightarrow \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ de degré 2 défini par le tiré en arrière de $E_1 + E_2$ sur la surface K3 revêtement double étale de S . Ceci permet dans tous les cas de calculer la dimension de $H^1(\tilde{S}, T_{\tilde{S}}(-\tilde{C}))$, grâce à des techniques cohomologiques que nous développons spécifiquement pour ce contexte. Comme dans le preuve du théorème précédent (3.41), dans les cas où cette dimension est 0 la preuve est terminée, et quand elle est > 0 on utilise des arguments supplémentaires pour la répartir entre $H^1(S, T_S(-C))$ et $H^1(S, T_S(-C - K))$.

Cette fois, en plus de l'existence de solides d'Enriques–Fano on utilise le fait que l'image de $\chi_{g,2}$ est contenue dans certaines sous-variétés strictes de \mathcal{R}_g , voir (3.62) ; nous avons étudié ces lieux particuliers dans l'espace de modules des courbes Prym pour eux-mêmes dans l'article [Y.1]. En particulier, dans le cas $g = 5$ on utilise les faits suivants, qui se déduisent de l'exemple (3.40.2) :

- pour $(S, C) \in \mathcal{EC}_{5,2}^I$, le modèle Prym canonique de $(C, K_S|_C)$ possède deux points doubles ordinaires ;
- pour $(S, C) \in \mathcal{EC}_{5,2}^{II+}$, l'application Prym canonique de $(C, K_S|_C)$ est de degré 2 sur son image ;
- pour $(S, C) \in \mathcal{EC}_{5,2}^{II-}$, le modèle Prym canonique de $(C, K_S|_C)$ possède quatre points doubles ordinaires.

Pour les composantes $\mathcal{EC}_{9,2}^{II\pm}$ il faut utiliser en outre l'argument de dégénérescence décrit ci-dessous.

Les cas restants sont les $\mathcal{EC}_{g,2}^I$ pour $g \geq 7$ impair, qu'on traite par un argument de dégénérescence délicat, en spécialisant les paires $(S, C) \in \mathcal{EC}_{g,2}^I$ en une paire $(S_0, C_0) \in \mathcal{EC}_{g-1,2}$, telle qu'il existe une courbe rationnelle lisse $\Gamma \subseteq S_0$ telle que $C_0 \cdot \Gamma = 2$ (en fait C_0 a une décomposition $\frac{g-3}{2}E_1 + E_2 + E_3$, et $\Gamma \cdot E_1 = 0$, $\Gamma \cdot E_2 = \Gamma \cdot E_3 = 1$).

(3.43) Théorème [9]. *Soit $\phi = 1$. La dimension de la fibre générale de l'application des modules $\chi_{g,1}$ est $\max(0, 10 - g)$. Ainsi $\chi_{g,1}$ domine le lieu hyperelliptique si $g \leq 10$, et est génériquement finie si $g \geq 10$.*

L'espace de modules $\mathcal{EC}_{g,1}$ est irréductible pour tout g , voir (3.40). D'après (3.37), l'application des modules $\chi_{g,1}$ a son image contenue dans le lieu des courbes Prym (C, η) telles que C est hyperelliptique. Ceci donne la dimension attendue $\max(0, 10 - g)$ pour sa fibre générale.

La preuve utilise le fait que la décomposition isotrope simple correspondant à $\mathcal{EC}_{g,1}$ est $(g - 1)E_1 + E_2$, donc met en œuvre seulement deux E_i , ce qui fait qu'on peut calculer les groupes de cohomologie nécessaires en considérant un revêtement double $\tilde{S} \rightarrow \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ comme dans la preuve du théorème précédent (3.42).

Extensions des surfaces d'Enriques

Dans les preuves des théorèmes précédents (3.41) et (3.42) nous avons utilisé l'existence d'extensions de certaines surfaces d'Enriques polarisées pour montrer que les applications des modules correspondantes ne sont pas génériquement injectives. Je donne ici quelques détails sur cet argument. D'autre part, j'explique comment nous avons pu construire certaines de ces extensions à partir d'extensions déjà existantes par une méthode de projection. Enfin j'énonce quelques problèmes ouverts dans cette direction sur lesquels je voudrais travailler par la suite.

Un *solide d'Enriques–Fano* de genre g est une paire (V, L) constituée d'un solide normal V et d'un fibré en droites ample L sur V , telle que $L^3 = 2g - 2$, $|L|$ contient une surface d'Enriques lisse, et V n'est pas un cône généralisé.²⁶ On note $\phi(V, L)$ l'invariant $\phi(L|_S)$ pour $S \in |L|$ générale.

Tout solide d'Enriques–Fano est le quotient d'une variété de Fano par une involution ayant un nombre fini de points fixes. Les quotients d'un solide lisse ont été classifiés par Bayle et Sano [Bay94, San95]; ce dernier montre en outre que tout solide d'Enriques–Fano à singularités quotients cycliques est de ce type. D'après [Min99], tout solide d'Enriques–Fano à singularités terminales est déformation d'un solide du type précédent. Du point de vue des extensions des surfaces d'Enriques, il est important de ne pas limiter arbitrairement les singularités autorisées. Cheltsov [Chl96] a démontré que les singularités d'un solide d'Enriques–Fano sont nécessairement canoniques \mathbf{Q} -Gorenstein (c'est le pendant de la proposition (3.5) pour les extensions de surfaces d'Enriques). On ne dispose pas d'une classification des solides d'Enriques–Fano avec de telles singularités, mais Prokhorov [Pro07] a démontré que leur genre est au plus 17.

Le fait que l'existence d'extensions indique que les fibres de l'application des modules sont de dimension > 0 est un thème central de ce chapitre. Il n'est cependant pas évident de démontrer des énoncés précis dans cette direction. Dans le cas des surfaces d'Enriques, on ne peut pas répéter la preuve du lemme (3.15) de Mukai et Beauville à cause des singularités que possèdent inévitablement les solides d'Enriques–Fano. À la place nous établissons la proposition suivante, en utilisant un résultat de Pardini.

(3.44) Proposition [9]. *Soit (V, L) un solide d'Enriques–Fano de genre $g \geq 6$ et d'invariant $\phi(V, L) = \phi \geq 2$. Pour $S \in |L|$ générale et $C \in |L|_S|$ générale, la fibre de l'application des modules $\chi_{g,\phi}$ a dimension strictement positive au point $(S, C) \in \mathcal{EC}_{g,\phi}$:*

$$\dim_{(S,C)}(\chi_{g,\phi}^{-1}(C, K_S|_C)) > 0.$$

²⁶. un cône généralisé est une variété obtenue en contractant la section d'auto-intersection négative d'un fibré en \mathbf{P}^1 .

Preuve. On considère le pinceau dans $|L|$ constitué des surfaces contenant C . Il donne une famille de dimension 1 de surfaces d'Enriques polarisées ayant C comme section hyperplane, et il suffit donc de démontrer que ces surfaces ne sont pas toutes isomorphes.

Puisque $\phi \geq 2$ et $g \geq 6$, le système linéaire $|L|$ définit un morphisme birationnel de V sur $V^b \subseteq \mathbf{P}^g$. La variété V^b ne peut pas être un cône puisque V n'est pas un cône généralisé. Puisque les sections hyperplanes de V^b ne sont pas uniréglées, d'après [Prd94, Prop. 1.7] (qui en fait s'applique à toutes les variétés qui ne sont pas des cônes) deux sections hyperplanes générales de V^b ne sont pas projectivement isomorphes. Ceci prouve que pour un choix général de C le pinceau correspondant paramètre des surfaces d'Enriques polarisées non-isomorphes. \square

Le lemme ci-dessous permet de fabriquer des solides d'Enriques–Fano par projection à partir de solides existants. L'hypothèse Y unirationnelle sert à assurer qu'après projection Y' n'est pas un cône.

(3.45) Lemme [9]. *Soit (S, L) une surface d'Enriques polarisée de genre $g \geq 6$ telle que $\phi(L) \geq 2$. On suppose qu'il existe D effectif sur S tel que $(S, L + D)$ est extensible à un solide d'Enriques–Fano (Y, H) qui est unirationnel. Alors (S, L) est extensible à un solide d'Enriques–Fano (Y', H') , et les membres du système linéaire $|H'|$ sont en bijection avec le sous-système de $|H|$ constitué des éléments contenant la courbe $D \subseteq S \subseteq Y$.*

(3.46) Applications.

(3.46.1) Le solide d'Enriques–Fano classique Y_{Enr} est l'image de \mathbf{P}^3 dans \mathbf{P}^{13} par le système linéaire de toutes les sextiques d'Enriques dont les droites doubles sont les arêtes d'un tétraèdre fixé. Ses sections hyperplanes sont munies d'une polarisation dont le type de décomposition isotrope simple est $2(E_1 + E_2 + E_3)$, correspondant à la composante $\mathcal{E}_{13,4}^{II+}$.

Par projection on fabrique un solide d'Enriques–Fano dont les sections hyperplanes ont type de décomposition simple $E_1 + E_2 + E_3 + E_4$, correspondant à la composante $\mathcal{E}_{7,3}$. En effet, soit $D = E_1 + E_2 + E_3 - E_4$, de sorte que

$$2(E_1 + E_2 + E_3) - D = E_1 + E_2 + E_3 + E_4.$$

On a $D^2 \geq 0$, donc D ou $-D$ est effectif, sauf si $D = K_S$: on en déduit immédiatement que D est effectif, ce qui permet d'appliquer le lemme (3.45).

(3.46.2) Le solide d'Enriques–Fano de Prokhorov est le quotient du cône $\tilde{Y} \subseteq \mathbf{P}^9$ au dessus de la surface de Del Pezzo $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \subseteq \mathbf{P}^8$ par une involution, voir [Pro07]. Prokhorov démontre que c'est l'unique solide d'Enriques–Fano de genre maximal 17.²⁷ Ses sections hyperplanes ont type de décomposition simple $4(E_1 + E_2)$, correspondant à la composante $\mathcal{E}_{17,4}^{IV+}$. En appliquant le lemme (3.45) comme en (3.46.1) ci-dessus, on montre que les surfaces d'Enriques polarisées paramétrées par les composantes suivantes sont extensibles :

- $\mathcal{E}_{13,3}^{II}$, type de décomposition simple $4E_1 + 3E_2$;
- $\mathcal{E}_{10,3}^{II}$, type de décomposition simple $3(E_1 + E_2)$;
- $\mathcal{E}_{9,3}^{II}$, type de décomposition simple $2E_1 + 2E_2 + E_3$;
- $\mathcal{E}_{7,2}^{II}$, type de décomposition simple $3E_1 + E_2$;
- $\mathcal{E}_{6,2}^{II}$, type de décomposition simple $2E_1 + E_2 + E_3$.

²⁷ On pourra comparer avec les solides de Fano de genre maximal 37, qui sont $\mathbf{P}(1, 1, 1, 3)$ et $\mathbf{P}(1, 1, 4, 6)$ par [Pro05] : le premier est abstraitement le cône sur la surface de Del Pezzo $v_3(\mathbf{P}^2) \subseteq \mathbf{P}^9$, et le second est une dégénérescence du premier, voir [13, Rmk.7.7]. Le premier apparaît dans l'exemple (3.29) plus haut.

(3.46.3) Une étude approfondie de l'unique solide de genre 9 dans les listes de Bayle et Sano montre que le membre général de $\mathcal{E}_{9,4}^+$ est extensible à un solide d'Enriques–Fano, voir [Mar]. Dans cet article Martello détermine les types de décomposition isotrope simple respectifs des surfaces d'Enriques polarisées sections hyperplanes de tous les solides d'Enriques–Fano connus.

Il y a dans les listes de Bayle et Sano des solides qu'on n'a pas vu sur scène ici. Notre étude concerne les fibres générales de l'application des modules, et ne permet pas de voir ce qui se passe pour des surfaces d'Enriques spéciales. Par exemple, nous démontrons [9, Cor. 6.5] que les surfaces d'Enriques sections hyperplanes des solides d'Enriques–Fano numéros 1 et 3 de [Bay94, Thm. A] contiennent des (-2) -courbes et sont donc spéciales.

(3.47) Quelques observations pour conclure. Idéalement on voudrait une théorie d'intégration des rubans sur une courbe Prym canonique semblable à celle développée pour les courbes canoniques que j'ai décrite dans la section 3.1. Malheureusement c'est probablement très difficile : en faisant quelques calculs on réalise que la plupart du temps l'espace de modules des rubans sur une courbe Prym canonique (C, η) a dimension plus grande que la fibre de l'application des modules pour les surfaces d'Enriques au dessus de (C, η) . C'est donc que la théorie des déformations sous-jacente à la construction de Wahl évoquée en (3.10) est obstruée : tous les rubans sur une courbe Prym canoniques ne sont pas nécessairement intégrables. Il n'est donc pas clair non plus qu'une fibre de dimension $r > 0$ de l'application des modules des surfaces d'Enriques implique toujours l'existence d'une $(r + 1)$ -extension.

D'autre part, pour étudier les extensions des courbes Prym canoniques il faut prendre en compte la possibilité d'extension sous forme d'une vraie fausse surface d'Enriques, selon la terminologie introduite en introduction de la section 3.1. Dans sa thèse [Ane21] Martina Anelli a mené une étude des surfaces à section hyperplane Prym canonique analogue à celle d'Epema pour les courbes canoniques. Poursuivre l'étude des vraies fausses surfaces d'Enriques et leurs extensions semble être une direction de recherche possible à suivre.

3.3 – Quelques lieux remarquables dans les espaces de modules de courbes

Je regroupe ici des résultats concernant certains lieux de courbes reliés aux applications des modules des surfaces $K3$ et des surfaces d'Enriques. Les courbes canoniques munies d'une racine k -ème du canonique possédant un certain nombre de sections apparaissent naturellement en relation avec l'application c_g^k , qui concerne les surfaces $K3$ dont la polarisation est k fois un fibré primitif. Les courbes Prym dont l'application Prym canonique n'est pas un plongement apparaissent en relation avec l'application des modules des surfaces d'Enriques à invariant $\phi = 2$.

Dans le même genre d'idée, le tout récent article [GV] étudie les courbes canoniques munies d'une structure de niveau ℓ , en relation avec les surfaces $K3$ admettant un revêtement cyclique de degré ℓ qui est encore une surface $K3$.

Courbes k -spin

On considère dans cette partie l'espace de modules \mathcal{KC}_g^k des paires (S, C) où S est une surface $K3$, $C \subseteq S$ une courbe lisse de genre g dont la classe dans $\text{Pic}(S)$ est k fois une classe primitive, voir (3.12). Dans ce cas il existe un entier naturel g_1 tel que

$$2g - 2 = k^2(2g_1 - 2).$$

Dans [11] nous avons fait Ciro Ciliberto et moi l'observation que l'application des modules correspondantes $c_g^k : \mathcal{K}C_g^k \rightarrow \mathcal{M}_g$ se factorise à travers

$$(S, C) \in \mathcal{K}C_g^k \mapsto (C, \mathcal{O}_S(\frac{1}{k}C)|_C) \in \mathcal{S}_g^{\frac{1}{k}, g_1},$$

où $\mathcal{S}_g^{\frac{1}{k}, g_1}$ est l'espace des modules des courbes k -spin de genre g ayant au moins $g_1 + 1$ sections indépendantes, c.-à-d. des paires (C, θ) où C est une courbe lisse de genre g et θ est un fibré inversible sur C tel que

$$k\theta = K_C \quad \text{et} \quad h^0(\theta) \geq g_1 + 1.$$

Notant $\mathcal{T}_g^{\frac{1}{k}, g_1} \subseteq \mathcal{M}_g$ l'image de $\mathcal{S}_g^{\frac{1}{k}, g_1}$ par le morphisme d'oubli $(C, L) \mapsto C$, on a une inclusion $\text{im}(c_g^k) \subseteq \mathcal{T}_g^{\frac{1}{k}, g_1}$ dont nous nous sommes demandés si c'est une égalité. En fait il est assez clair que $\mathcal{T}_g^{\frac{1}{k}, g_1}$ est réductible, et la bonne question est plutôt la suivante.

(3.48) Question. *L'image de l'application des modules c_g^k est-elle dense dans une composante irréductible de $\mathcal{T}_g^{\frac{1}{k}, g_1}$?*

(3.49) Pour $3 \leq g_1 \leq 5$, nous répondons par l'affirmative à cette question : nous montrons [11, Prop. 5.3] que pour tout $k \geq 2$ l'adhérence dans \mathcal{M}_g de la famille des courbes intersections complètes de degrés $(4, k)$ dans \mathbf{P}^3 si $g_1 = 3$, resp. $(2, 3, k)$ dans \mathbf{P}^4 si $g_1 = 4$, resp. $(2, 2, 2, k)$ dans \mathbf{P}^5 si $g_1 = 5$, est une composante irréductible de $\mathcal{S}_g^{\frac{1}{k}, g_1}$.

(3.50) Cas des thêta-caractéristiques. Lorsque $k = 2$, un fibré θ tel que $2\theta = K_C$ s'appelle une thêta-caractéristique. Dans ce cas, un théorème dû à Mumford et Harris dit que toute composante irréductible de $\mathcal{T}_g^{\frac{1}{2}, g_1}$ est de dimension au moins la dimension attendue,

$$\text{expdim}(\mathcal{T}_g^{\frac{1}{2}, g_1}) = \dim(\mathcal{M}_g) - \binom{g_1+1}{2}.$$

Cette dimension attendue est effectivement la dimension des familles d'intersections complètes considérées en (3.49) lorsque $k = 2$. On connaît cependant des exemples de composantes superabondantes (c.-à-d. dont la dimension excède strictement la dimension attendue) de $\mathcal{T}_g^{\frac{1}{2}, g_1}$, voir par exemple [Far12]. On trouve d'autres résultats dans [TiB87], mais ils ne nous ont pas été utiles.

L'existence d'une dimension attendue permet de faire le petit calcul fort instructif suivant :

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{K}C_g^2) - \text{expdim}(\mathcal{T}_g^{\frac{1}{2}, g_1}) &= (19 + g) - (3g - 3) + \binom{g_1+1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(g_1 - 7)(g_1 - 8). \end{aligned}$$

Pour $3 \leq g_1 \leq 6$ la différence ci-dessus est égale à la dimension de la fibre générale de c_g^2 , tandis que pour $g_1 \geq 7$ l'application des modules c_g^2 est génériquement injective, voir [11]. Ainsi la dimension de l'image de c_g^2 coïncide avec la dimension attendue de $\mathcal{T}_g^{\frac{1}{2}, g_1}$ lorsque $g_1 \leq 8$, tandis que pour $g_1 \geq 9$ l'image de c_g^2 se trouve nécessairement dans une composante superabondante de $\mathcal{T}_g^{\frac{1}{2}, g_1}$. Ceci rend particulièrement intrigante la question (3.48) dans le cas $k = 2$.

Nous avons un programme pour la suite pour calculer la dimension de la composante de $\mathcal{T}_g^{\frac{1}{2}, g_1}$ contenant l'image de c_g^2 . La codimension de $\mathcal{T}_g^{\frac{1}{2}, g_1}$ est calculée par le rang d'une application de type Petri,

$$\mu_1 : \bigwedge^2 H^0(C, \theta) \rightarrow H^0(C, 2K),$$

voir [ACG11, chap. 21], qu'on peut calculer explicitement pour une dégénérescence de C sous forme d'une courbe graphe similaire à celles considérées dans la preuve du théorème (1.2). Si ce rang coïncide avec la codimension de l'image de c_g^2 dans \mathcal{M}_g , on pourra conclure que l'image est dense dans une composante de $\mathcal{T}_g^{\frac{1}{2}, g_1}$. Il reste à mettre en œuvre effectivement les calculs pour une courbe graphe, au moins pour les premières valeurs de g_1 ; ils sont essentiellement combinatoires, et pourront avantageusement se faire en utilisant un ordinateur.

Dans [11] nous effectuons une analyse approfondie des composantes de $\mathcal{S}_g^{\frac{1}{k}, g_1}$ pour $k = 2$ et $3 \leq g_1 \leq 5$, basée sur les inégalités de Castelnuovo et la classification des surfaces de petit degré. Nous obtenons également des résultats pour $k = 3$ et $g_1 = 3, 4$, mais dans ce cas se présente la difficulté supplémentaire qu'on n'a pas de dimension attendue pour les lieux de courbes spin. Ceci s'est révélé étonnamment difficile, et fut l'occasion de découvrir plusieurs familles intéressantes de courbes sur les scrolls rationnels normaux. Il reste de nombreuses questions ouvertes, qu'il semble envisageable de considérer par la suite. Voici un aperçu des résultats de classification que nous obtenons.

(3.51) Théorème [11]. *L'espace de modules $\mathcal{S}_9^{\frac{1}{2}, 3}$ a deux composantes irréductibles :*

- *une composante $\mathcal{H}_{9,4}$ qui paramètre des courbes spin (C, θ) où C est hyperelliptique et θ est 4 fois le g_2^1 ;*
- *l'adhérence de la famille des intersections complètes de degrés $(2, 4)$ dans \mathbf{P}^3 .*

(3.52) Théorème [11]. *L'espace de modules $\mathcal{S}_{13}^{\frac{1}{2}, 4}$ a trois composantes irréductibles :*

- *une composante $\mathcal{H}_{13,5}^2$ qui paramètre des courbes spin (C, θ) telles que C est hyperelliptique et $\theta = 5\mathfrak{l} + p_1 + p_2$, où \mathfrak{l} est le g_2^1 et p_1, p_2 sont des points de Weierstrass de C ;*
- *une composante $\mathcal{E}_{13,2}$ paramétrant des courbes spin (C, θ) telles que C est revêtement double d'une courbe elliptique E , et θ est tiré-en-arrière d'un fibré inversible sur E ;*
- *la composante des intersections complètes de degrés $(2, 2, 3)$ dans \mathbf{P}^4 .*

(3.53) Proposition [11]. *Soit M une composante irréductible de $\mathcal{S}_{17}^{\frac{1}{2}, 5}$, et soit (C, θ) un membre général de M . Si C n'a pas de g_4^1 , alors $h^0(\theta) = 6$, et $|\theta|$ est sans point base et birationnel.*

La question de savoir si une composante M comme ci-dessus est nécessairement la composante des intersections complètes de degrés $(2, 2, 2, 2)$ dans \mathbf{P}^5 est compliquée, et il reste du travail à faire pour y répondre définitivement. Par ailleurs il est certainement possible de classifier les composantes de $\mathcal{S}_{17}^{\frac{1}{2}, 5}$ dont le membre général est une courbe tétragonale, mais la botanique de ces composantes est assez riche.

(3.54) Proposition [11]. *Soit $(C, \theta) \in \mathcal{S}_{19}^{\frac{1}{3}, 3}$ telle que C n'a pas de g_6^1 . Alors C est une intersection complète de degrés $(3, 4)$ dans \mathbf{P}^3 .*

L'hypothèse que C n'a pas de g_6^1 permet d'exclure que $|\theta|$ n'est pas birationnel, et s'il l'est que la courbe Γ image de C par le morphisme associé se trouve sur une quadrique. Voici un exemple pour lequel cette dernière situation se produit.

Considérons Γ courbe irréductible de type $(6, 6)$ sur une quadrique lisse $S = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \subseteq \mathbf{P}^3$, possédant 6 nœuds et pas d'autre singularité, de sorte que Γ est de genre 19. Le diviseur $K_S + \Gamma$ adjoint de Γ dans S a bidegré $(4, 4)$, donc on trouve une racine cubique du canonique sur la normalisation C de Γ si les 6 nœuds se trouvent sur une conique.

Nous vérifions que de telles courbes existent effectivement, et donnent un lieu \mathcal{S}_1 de dimension 33 dans $\mathcal{S}_{19}^{\frac{1}{3},3}$. D'autre part le lieu \mathcal{S}_0 des courbes intersections complètes de degrés (3, 4) a dimension 34. Nous posons la question : \mathcal{S}_1 est-il contenu dans l'adhérence de \mathcal{S}_0 ?

On peut considérer des courbes similaires toujours sur une quadrique lisse de \mathbf{P}^3 dont la normalisation porterait une structure k -spin pour $k \geq 3$ arbitraire. Toutefois il n'est pas clair que ces courbes existent effectivement, et nous n'avons pas essayé de le vérifier pour $k > 3$. On peut imaginer également des exemples similaires sur des surfaces scrolls rationnels normaux.

(3.55) Proposition [11]. *Soit $(C, \theta) \in \mathcal{S}_{28}^{\frac{1}{3},4}$ telle que $|\theta|$ est sans point base et birationnel, et C n'a pas de g_3^1 . Alors C est une intersection complète de degrés (2, 3, 3) dans \mathbf{P}^4 .*

Les mêmes commentaires que précédemment s'appliquent à cette proposition. Comme on le voit, le problème de classification des courbes spin avec un certain nombre de sections pose divers problèmes concrets, dont qui cherchera à les résoudre apprendra sans nul doute des techniques variées en géométrie algébrique.

Courbes Prym à modèle Prym canonique non régulier

Dans l'article [Y.1] en collaboration avec Ciliberto, Galati et Knutsen, nous étudions les modules des courbes Prym pour lesquelles l'application Prym canonique n'est pas un plongement. Ces résultats sont en relation avec l'étude des applications des modules pour les surfaces d'Enriques polarisées à invariant $\phi = 2$ dans [9], voir le théorème (3.42) : d'une part le résultat principal de [Y.1] est nécessaire pour traiter l'un des cas particuliers du théorème (3.42), et d'autre part les courbes sur les surfaces d'Enriques à $\phi = 2$ permettent d'obtenir agréablement les cas de genre petit de la proposition (3.58). Je renvoie au numéro (3.62) pour quelques détails supplémentaires.

(3.56) Avertissement. La preuve du résultat principal de [Y.1] est incomplète, comme je m'en suis aperçu en préparant le présent mémoire. Avec mes co-auteurs nous pensons être en mesure de donner des arguments supplémentaires pour arriver à une preuve complète, dont je donne les grandes lignes un peu plus loin.

Cependant tant que ces arguments supplémentaires ne sont pas écrits de manière définitive **il faut considérer les résultats donnés dans cette sous-partie comme conjecturaux** ; je les présente donc à titre purement illustratif. En dehors des résultats de cette sous-partie, le seul résultat impacté par le problème est le cas $\mathcal{EC}_{7,2}^I$ du théorème (3.42).

Pour $g \geq 2$ on considère \mathcal{R}_g l'espace de modules des courbes Prym de genre g , c'est-à-dire les paires (C, η) où C est une courbe lisse de genre g et η un fibré en droites non trivial de 2-torsion sur C . L'espace \mathcal{R}_g est un revêtement étale irréductible de degré $2^{2g} - 1$ de l'espace de modules \mathcal{M}_g des courbes de genre g . Pour une courbe Prym (C, η) , le système linéaire *Prym canonique* $|K_C + \eta|$ a des points base si et seulement si C est hyperelliptique et $\eta = \mathcal{O}_C(p - q)$ avec p et q des points de ramification du g_2^1 de C .

Nos résultats concernent le lieu $\mathcal{R}_g^0 \subseteq \mathcal{R}_g$ des courbes Prym (C, η) telles que le système Prym canonique est sans point base mais définit un morphisme qui n'est pas un plongement. Le lieu \mathcal{R}_g^0 est contenu dans le lieu tétragonal de \mathcal{R}_g (constitué des courbes Prym (C, η) telles que C est tétragonale), voir lemme (3.61), et pour $g \leq 4$ il est dense dans \mathcal{R}_g . Le résultat principal de [Y.1] est le suivant.

(3.57) Théorème [Y.1]. *Soit $g \geq 5$. Le lieu \mathcal{R}_g^0 est irréductible unirationnel de dimension $2g + 1$.*

Avant de donner les grandes lignes de la preuve, voici quelques compléments utiles à ce résultat.

(3.58) Proposition [Y.1]. *Pour $g \geq 5$, et $(C, \eta) \in \mathcal{R}_g^0$ générale, l'application Prym canonique de (C, η) est birationnelle sur son image, qui est une courbe ayant exactement deux nœuds pour toutes singularités.*

Les deux énoncés suivants décrivent des lieux dans \mathcal{R}_g^0 où l'application Prym canonique se comporte de manière spéciale par rapport à la proposition (3.58) ci-dessus.

(3.59) Proposition [Y.1]. *Soit $g = 5$. Les courbes Prym $(C, \eta) \in \mathcal{R}_5$ ayant un modèle Prym canonique avec quatre nœuds pour toute singularité forment un lieu \mathcal{R}_5^{00} irréductible unirationnel de codimension 1 dans \mathcal{R}_5^0 .*

L'adhérence de \mathcal{R}_5^{00} dans \mathcal{R}_5 coïncide avec l'adhérence du lieu des courbes Prym (C, η) telles qu'il existe une thêta-caractéristique θ telle que $h^0(\theta) = h^0(\theta + \eta) = 2$.

(3.60) Proposition [Y.1]. *Soit $g \geq 4$. Le lieu $\mathcal{R}_g^{0, \text{nb}} \subseteq \mathcal{R}_g^0$ des courbes Prym (C, η) dont l'application Prym canonique n'est pas birationnelle sur son image est irréductible de dimension $2g - 2$, constitué des courbes Prym (C, η) telles qu'il existe un morphisme $f : C \rightarrow E$ de degré 2 sur une courbe elliptique et $\eta = f^*\eta'$, pour η' un fibré non-trivial de 2-torsion sur E .*

Notre preuve du théorème (3.57) repose sur la construction d'un paramétrage explicite de \mathcal{R}_g^0 par une variété rationnelle, fortement inspirée de [AC81a] où Arbarello et Cornalba construisent de tels paramétrages pour certains espaces de modules de courbes de petite gonolité. Pour commencer, nous avons besoin du lemme élémentaire suivant.

(3.61) Lemme. *Soit (C, η) une courbe Prym dont le système Prym canonique $|K_C + \eta|$ est sans point base. Soit $p, q \in C$ deux points, éventuellement infiniment proches. Les points p et q sont identifiés par $|K_C + \eta|$ si et seulement si C possède un g_4^1 et $\eta = \mathcal{O}_C(p + q - p' - q')$, où $2p + 2q$ et $2p' + 2q'$ sont deux diviseurs appartenant au g_4^1 .*

Observons au passage que dans ces conditions les points p' et q' sont eux aussi identifiés par $|K_C + \eta|$, ce qui donne une première explication à la proposition (3.58).

Dans [AC81a] Arbarello et Cornalba construisent une variété rationnelle \mathcal{H} et une application rationnelle dominante sur l'espace de modules des courbes téragonales de genre g

$$\mathcal{H} \dashrightarrow \mathcal{M}_{g,4}^1,$$

en démontrant qu'une courbe téragonale de genre g générale est birationnelle à une courbe plane de degré $n = \lceil \frac{g}{2} \rceil + 3$, possédant un point $(n-4)$ -uple ordinaire et des nœuds en position générale dans \mathbf{P}^2 ; le g_4^1 est alors donné par le pinceau des droites passant par le point $(n-4)$ -uple.

Plus précisément, soit p un point fixé une fois pour toutes, et p_1, \dots, p_δ des points généraux de \mathbf{P}^2 , où $\delta = \binom{n-1}{2} - \binom{n-4}{2} - g$. Considérons $\mathcal{L}_n(p^{n-4}, p_1^2, \dots, p_\delta^2)$ le système linéaire des courbes planes de degré n ayant multiplicité (au moins) $n-4$ en p et (au moins) 2 en chaque p_i . Alors $\mathcal{L}_n(p^{n-4}, p_1^2, \dots, p_\delta^2)$ a la dimension attendue, et son membre général est une courbe irréductible ayant un point $(n-4)$ -uple ordinaire en p , un nœud en chaque p_i , et aucune autre singularité. Essentiellement, ceci est une application du théorème (1.6) (ou (1.11) si l'on préfère) et du fait

que le *diviseur caractéristique*²⁸ d'un membre irréductible $[C] \in \mathcal{L}_n(p^{n-4}, p_1^2, \dots, p_\delta^2)$ est non spécial pour raison de degré.

On prend alors

$$\mathcal{H} = \bigcup_{\substack{p_1, \dots, p_\delta \\ \text{généraux}}} \mathcal{L}_n(p^{n-4}, p_1^2, \dots, p_\delta^2),$$

rationnelle irréductible, qui vient naturellement avec une application rationnelle $\mathcal{H} \dashrightarrow \mathcal{M}_{g,4}^1$. Arbarello et Cornalba prouvent qu'elle est dominante en montrant que sa différentielle est surjective au point général, ce qui est suffisant puisqu'il est bien connu que $\mathcal{M}_{g,4}^1$ est irréductible.

De notre côté pour paramétrer \mathcal{R}_g^0 , tenant compte du lemme (3.61) nous considérons les systèmes linéaires suivants : soit p, p_1, \dots, p_δ comme précédemment, soit D, D' deux droites passant par p générales, et soit q_1, q_2 (resp. q'_1, q'_2) deux points généraux de D (resp. D') ; nous considérons le sous-système

$$\mathcal{L}_n(p^{n-4}, p_1^2, \dots, p_\delta^2, [q_1, q_2, q'_1, q'_2]) \subseteq \mathcal{L}_n(p^{n-4}, p_1^2, \dots, p_\delta^2)$$

constitué des courbes $[C] \in \mathcal{L}_n(p^{n-4}, p_1^2, \dots, p_\delta^2)$ qui sont tangentes à D en q_1, q_2 et à D' en q'_1, q'_2 .

De la même manière que précédemment ce système linéaire a la dimension attendue, son membre général C est une courbe possédant un point $(n-4)$ -uple ordinaire, δ nœuds, et aucune autre singularité, qui donne lieu naturellement à une courbe Prym (C, η) qui appartient à \mathcal{R}_g^0 en vertu du lemme (3.61). On pose donc

$$\mathcal{G} = \bigcup_{\substack{p_1, \dots, p_\delta, q_1, q_2, q'_1, q'_2 \\ \text{généraux}}} \mathcal{L}_n(p^{n-4}, p_1^2, \dots, p_\delta^2, [q_1, q_2, q'_1, q'_2]),$$

rationnelle irréductible et venant avec une application rationnelle $\mathcal{G} \dashrightarrow \mathcal{R}_g^0$. Puisque $\mathcal{H} \dashrightarrow \mathcal{M}_{g,4}^1$ est dominante, \mathcal{G} donne une composante irréductible unirationnelle de \mathcal{R}_g^0 .

Ce qui manque dans la preuve présentée dans [Y.1], c'est la vérification rigoureuse du fait qu'il n'existe pas d'autre composante irréductible de \mathcal{R}_g^0 que celle donnée par \mathcal{G} . Voici comment nous proposons de le faire.

Tout d'abord il faut s'assurer qu'il n'existe pas dans l'ouvert de définition de $\mathcal{H} \dashrightarrow \mathcal{M}_{g,4}^1$ de famille maximale irréductible $\mathcal{G}' \neq \mathcal{G}$ paramétrant des courbes de \mathcal{R}_g^0 . Soit \mathcal{G}' une composante irréductible de la famille des courbes planes de degré n et de genre g , ayant multiplicité au moins $n-4$ en p , et donnant lieu à une courbe Prym de \mathcal{R}_g^0 . En utilisant le théorème (1.11) on montre que le membre général C de \mathcal{G}' a un point $(n-4)$ -uple ordinaire en p , et que ses autres singularités sont des nœuds. Il appartient donc à un système linéaire $\mathcal{L}_n(p^{n-4}, p_1^2, \dots, p_\delta^2, [q_1, q_2, q'_1, q'_2])$, pour lequel éventuellement les points $p_1, \dots, p_\delta, q_1, q_2, q'_1, q'_2$ pourraient être en position spéciale. Cependant la dimension de ce système ne dépend pas du choix de ces points, même si ceux-ci sont en position spéciale (en effet le degré du diviseur caractéristique ne dépend pas de la position des points, ce qui suffit pour voir qu'il est toujours non-spécial). On en déduit que l'union des systèmes linéaires $\mathcal{L}_n(p^{n-4}, p_1^2, \dots, p_\delta^2, [q_1, q_2, q'_1, q'_2])$ est irréductible, même si on autorise les configurations spéciales de points $p_1, \dots, p_\delta, q_1, q_2, q'_1, q'_2$. Ceci prouve que C appartient à l'adhérence de \mathcal{G} , et donc les adhérences de \mathcal{G} et \mathcal{G}' coïncident, comme il fallait démontrer.

28. soit $\varepsilon : \tilde{\mathbf{P}} \rightarrow \mathbf{P}^2$ l'éclatement de p, p_1, \dots, p_δ de sorte que $\varepsilon^* \mathcal{L}_n(p^{n-4}, p_1^2, \dots, p_\delta^2)$ est un système linéaire complet $|L|$; appelons encore C sa transformée stricte dans $\tilde{\mathbf{P}}$; le diviseur caractéristique correspond au fibré inversible $L|_C$, c'est-à-dire au fibré normal de C dans $\tilde{\mathbf{P}}$.

Enfin il faut tenir compte du fait qu'on ne sait pas si l'application rationnelle dominante $\mathcal{H} \dashrightarrow \mathcal{M}_{g,4}^1$ est surjective, et donc vérifier qu'il n'y a pas de composante irréductible de \mathcal{R}_g^0 en dehors de son image. Soit $\overline{\mathcal{H}}$ et $\overline{\mathcal{M}}_{g,4}^1$ les adhérences de \mathcal{H} et $\mathcal{M}_{g,4}^1$ dans $|\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(n)|$ et $\overline{\mathcal{M}}_g$ respectivement, et $\tilde{\mathcal{H}}$ l'éclatement de $\overline{\mathcal{H}}$ tel qu'il existe un morphisme $\tilde{\mathcal{H}} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,4}^1$; puisque $\tilde{\mathcal{H}}$ et $\overline{\mathcal{M}}_{g,4}^1$ sont projectifs, ce morphisme est bien surjectif. Un point \tilde{C} du diviseur exceptionnel de $\tilde{\mathcal{H}} \rightarrow \overline{\mathcal{H}}$ est la donnée d'un point $[C] \in \overline{\mathcal{H}}$ plus un arc infinitésimal dans $\overline{\mathcal{H}}$ centré en $[C]$, et l'image de \tilde{C} dans $\overline{\mathcal{M}}_{g,4}^1$ est déterminée par la réduction stable de la déformation de C correspondant à cet arc. Essentiellement, il suffit pour arriver à nos fins de vérifier que les réductions stables des courbes multiples $[mC_0] \in \overline{\mathcal{H}}$, C_0 irréductible, ne peuvent donner lieu à une composante irréductible de \mathcal{R}_g^0 . En considérant que le pinceau des droites par p découpe un g_4^1 , on voit qu'on peut avoir seulement $m = 2$ ou 4 ; dans le premier cas la réduction stable donne lieu à une courbe revêtement double d'une courbe hyperelliptique, et dans le second cas à une courbe tétragonale pour laquelle tous les points de ramification du g_4^1 sont triples. Dans un cas comme dans l'autre, les courbes obtenues ont trop peu de modules pour donner lieu à une composante irréductible de \mathcal{R}_g^0 , puisque chacune de ces composantes a dimension au moins $2g + 1$. Ceci complète finalement la preuve du théorème (3.57).

(3.62) Lien avec les sections hyperplanes de surfaces d'Enriques. Nous avons été amenés à nous intéresser à ces lieux particuliers dans les espace de modules de courbes Prym en rapport avec les applications des modules pour les surfaces d'Enriques polarisées. Il résulte des faits présentés en (3.37) que pour $\phi = 2$ et pour tout $g \geq 6$, l'image de l'application des modules $\chi_{g,2} : \mathcal{EC}_{g,2} \rightarrow \mathcal{R}_g$ est contenue dans \mathcal{R}_g^0 . En effet, pour $(S, L) \in \mathcal{EC}_{g,2}$ avec $g \geq 6$, le modèle birationnel de S défini par $|L|$ possède des droites doubles, en vertu de quoi ses sections hyperplanes sont des courbes Prym singulières.

De la même façon, pour $\phi = 2$ et $g = 5$ il résulte des faits énoncés dans l'exemple (3.40.2) que :

- (i) l'image de $\chi_{5,2}^I$ est contenue dans \mathcal{R}_5^0 ;
- (ii) l'image de $\chi_{5,2}^{II+}$ est contenue dans $\mathcal{R}_5^{0,\text{nb}}$;
- (iii) l'image de $\chi_{5,2}^{II-}$ est contenue dans \mathcal{R}_5^{00} .

4 – Géométrie énumérative

(4.1) Le problème énumératif dont il sera principalement question dans ce chapitre est le suivant. Soit $S \subseteq \mathbf{P}^N$ une surface lisse. On suppose que la famille des sections hyperplanes de S irréductibles et δ -nodales a dimension n . Déterminer le nombre de ces sections hyperplanes passant par n points généraux $x_1, \dots, x_n \in S$ prescrits. Souvent, on dira par abus de langage “déterminer le nombre de sections hyperplanes irréductibles et δ -nodales” tout court.

Ceci revient à considérer $V^\delta \subseteq \check{\mathbf{P}}^N$, l’adhérence dans l’espace projectif dual $\check{\mathbf{P}}^N$ de l’ensemble des hyperplans découpant une section irréductible et δ -nodale, c.-à-d. l’adhérence de la variété de Severi $V^{\mathcal{O}_S(1), \delta}$ dans la terminologie du chapitre 1, si $S \subseteq \mathbf{P}^N$ est linéairement normale, et à chercher à déterminer son degré. Bien sûr ici je fais fi de différents problèmes qui peuvent se poser, par exemple V^δ peut très bien ne pas être équidimensionnelle.²⁹

(4.2) Prenons un instant pour revenir sur la construction de cette variété V^δ . On considère la variété d’incidence $\mathcal{I}^\circ \subseteq (S^\delta)^\circ \times \check{\mathbf{P}}^N$, où $(S^\delta)^\circ$ désigne le produit S^δ privé de la grande diagonale, définie par les équations polynomiales suivantes : pour tout $(x_1, \dots, x_\delta, \varpi) \in (S^\delta)^\circ \times \check{\mathbf{P}}^N$, $(x_1, \dots, x_\delta, \varpi) \in \mathcal{I}^\circ$ si et seulement si

$$\varpi^\perp \cap S \text{ est singulière en } x_1, \dots, x_\delta.$$

Ensuite on prend l’adhérence de Zariski \mathcal{I} de \mathcal{I}° dans $S^\delta \times \check{\mathbf{P}}^N$. La projection de \mathcal{I} dans $\check{\mathbf{P}}^N$ est un sous-schéma ; on sélectionne ses composantes irréductibles correspondant à des sections irréductibles et δ -nodales de S pour former V^δ .

Les deux opérations “prendre l’adhérence” et “sélectionner les composantes” ne sont pas du tout innocentes et peuvent poser de sérieux problèmes. Elles font en particulier que V^δ se comporte sinon mal, au moins de façon compliquée par déformation de S . Ce phénomène est la raison d’être du travail [2] avec Ciro Ciliberto, que je présente dans la première section de ce chapitre.

Dans les situations raisonnablement favorables, disons lorsque V^δ a la codimension attendue δ , la variété d’incidence \mathcal{I} est une intersection complète de codimension 3δ dans $S^\delta \times \check{\mathbf{P}}^N$. Après projection, il n’y a aucune raison pour qu’il en soit de même pour $V^\delta \subseteq \check{\mathbf{P}}^N$, et on peut naturellement se demander quand est-ce que c’est le cas. Pour $\delta = 1$, si $V^1 = S^\vee$ est une hypersurface c’est bien entendu le cas, et son équation est le discriminant de S . Nous apportons quelques réponses à cette question pour $\delta > 1$ dans le travail [8] avec Laurent Busé, suivant les indications de Salmon 150 ans plus tôt. Ces résultats sont présentés dans la seconde section de ce chapitre.

(4.3) Dans le livre [Sa862] Salmon calcule directement en manipulant des polynômes le nombre de plans δ -tangents à une surface $S \subseteq \mathbf{P}^3$ de degré d générale, et passant par $3-\delta$ points généraux fixés, $\delta = 1, 2, 3$. Pour les amateurs de belles formules, ces nombres sont respectivement

$$d(d-1)^2, \quad \frac{1}{2}d(d-1)(d-2)(d^3 - d^2 + d - 12), \quad \text{et} \\ \frac{1}{6}d(d-2)(d^7 - 4d^6 + 7d^5 - 45d^4 + 114d^3 - 111d^2 + 548d - 960) ;$$

29. *A priori* le degré de V^δ se calcule en comptant ses points d’intersections avec n hyperplans généraux de $\check{\mathbf{P}}^N$, ce qui revient à compter les sections hyperplanes irréductibles et δ -nodales découpées sur S par des hyperplans passant par n points généraux $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{P}^N$. En général il revient au même d’imposer le passage par n points généraux sur S . Ce n’est toutefois pas le cas pour les questions étudiées en section 4.1, mais je n’entrerai pas dans ce niveau de détail dans ce texte.

ils donnent 36, 480, et 3200 pour $d = 4$. Salmon décrit en outre d'autres objets associés à S , comme par exemple sa *développable hessienne*, qui est la surface développable définie par les plans découpant une section cuspidale sur S .³⁰ Ces résultats sont résumés et complétés dans l'exposé [TV.14].

Le cœur de la méthode de Salmon est le calcul de résultants et discriminants, et l'analyse de leurs degrés en fonction de bonnes graduations ; c'est ce qu'on entend habituellement par *théorie de l'élimination*. Techniquement parlant, la théorie de l'élimination consiste à faire disparaître certaines indéterminées d'un système d'équations polynomiales, autrement dit à calculer l'idéal d'une variété obtenue par projection à partir de l'idéal de la variété de départ (et en fait en premier lieu à justifier que cette projection est une variété algébrique). Bien entendu dans le cas qui nous intéresse ici, cela s'applique à la projection de $\mathcal{I} \subseteq S^\delta \times \mathbf{P}^N$ dans \mathbf{P}^N . Aujourd'hui ces calculs peuvent se faire assez efficacement à l'aide d'un ordinateur en utilisant des bases de Gröbner.

J'ai obtenu des résultats de géométrie énumérative par dégénérescence d'une part (avec Ciro Ciliberto), et par théorie de l'élimination d'autre part (avec Laurent Busé), que je présente respectivement dans les deux sections de ce chapitre. L'article [8] n'est pas encore publié, mais il a été accepté pour présentation à une conférence après examen par un comité de lecture.

4.1 – Limites de variétés de Severi

Avec Ciro Ciliberto, nous décrivons dans [2] les limites des variétés de Severi de surfaces $K3$ quartiques dans le cadre de diverses dégénérescences. On ne peut pas dire que cet article ait reçu un écho retentissant, mais c'est néanmoins l'un de mes préférés. C'est ce travail qui m'a conduit à entreprendre le séminaire indiqué p. 98, dont les notes sont en cours de rédaction.

Notre idée en commençant ce travail était de démontrer par dégénérescence des résultats d'irréductibilité pour les variétés de Severi des surfaces $K3$ de genre 3. Nous avons pu obtenir notamment la proposition (1.14) présentée dans le premier chapitre, et les résultats mentionnés au numéro (1.5). Pour y parvenir nous avons dessiné un cadre conceptuel pour décrire ces limites de variétés de Severi ; il met en jeu différentes notions de réduction stable, et me semble être l'aspect le plus intéressant de ce travail.

Notre approche se trouve dans la continuité des travaux de Ran [Ran86, Ran89b, Ran89a], Caporaso–Harris [CH98b, CH98a], Vakil [Vak00] sur l'énumération des courbes planes (ou plus généralement sur une surface réglée rationnelle minimale) par dégénérescence. Le principe fondamental commun à ces travaux (voir (4.12)) a ensuite été vastement généralisé par Jun Li [Li02], puis par Abramovich–Chen–Gross–Siebert [ACGS20] ; voir aussi les travaux de Brett Parker ([Prk12] et suivants), et le concept de variété explosée qu'il introduit. Nous nous intéressons à la même question que ACGS ; notre théorie (pour l'heure encore largement conjecturale, contrairement à la leur) est plus concrète et explicite, en particulier nous n'utilisons pas de classes virtuelles. Notre approche est donc certainement moins robuste et générale, mais permet en principe d'énumérer d'honnêtes courbes dans des cas où les invariants de type Gromov–Witten ne sont pas énumératifs (voir l'exemple (5.24)). J'espère obtenir des applications en ce sens par la suite.

Voici formulé précisément le problème que nous considérons.

30. Soit $\text{Hess}(S)$ l'hypersurface hessienne de S ; la courbe $S \cap \text{Hess}(S)$ paramètre les points $p \in S$ tels que $\mathbf{T}_p S \cap S$ est une courbe avec un point cuspidal en p , $\mathbf{T}_p S$ désignant le plan projectif tangent en p à S ; la famille des plans $\mathbf{T}_p S$, $p \in S \cap \text{Hess}(S)$ est une courbe Γ dans l'espace dual \mathbf{P}^3 ; la développable hessienne est la surface dans \mathbf{P}^3 duale de Γ .

(4.4) Problème. Soit $S_0 \subseteq \mathbf{P}^3$ une surface de degré d , *a priori* arbitrairement singulière, et $S_1 \subseteq \mathbf{P}^3$ une surface de degré d générale. On considère $\pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{D}$ la famille de surfaces au dessus du disque unité \mathbf{D} définie par le pinceau engendré par S_0 et S_1 : ceci signifie que $\mathcal{S} \subseteq \mathbf{P}^3 \times \mathbf{D}$ est le solide d'équation

$$(4.4.1) \quad f_0(\mathbf{x}) + tf_1(\mathbf{x}) = 0,$$

où f_0 et f_1 sont les équations de S_0 et S_1 respectivement, \mathbf{x} un système de coordonnées homogènes sur \mathbf{P}^3 , et t la coordonnée sur \mathbf{D} , et π est la restriction de la projection $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$. Pour tout $t \in \mathbf{D}$ on note S_t la surface $\pi^{-1}(S_t) \subseteq \mathbf{P}^3$.

Pour $\delta = 1, 2, 3$ et $t \neq 0$, on note $V^\delta(S_t) \subseteq |\mathcal{O}_{S_t}(1)| \cong \check{\mathbf{P}}^3$ l'adhérence de la variété de Severi paramétrant les sections hyperplanes irréductibles δ -nodales de la surface lisse S_t . La question qu'on se pose est :

Quelle est la limite des $V^\delta(S_t)$ lorsque t tend vers 0 ?

En fait nous nous sommes bornés à examiner le cas du degré $d = 4$, mais le choix du degré ne change pas les choses en profondeur. Nous avons étudié en grand détail les deux cas où S_0 est (a) un tétraèdre, et (b) une surface de Kummer. Ces deux cas et leur comparaison sont importants pour les résultats d'irréductibilité (1.14) et (1.5) des variétés de Severi, mais pour tâcher de maintenir le propos dans des proportions raisonnables je vais me limiter dans ce mémoire au cas du tétraèdre, qui est le prototype des cas que je voudrais considérer dans la suite de mes recherches. On peut également considérer diverses variations de cette dégénérescence (en une réunion de plusieurs hypersurfaces réduites en position générale, en une quadrique double, etc.), pour lesquelles la description des limites des variétés de Severi est un simple exercice une fois compris le cas du tétraèdre.

Pour définir la limite des variétés de Severi, on considère

$$\coprod_{t \neq 0} V^\delta(S_t) \subseteq \coprod_{t \neq 0} |\mathcal{O}_{S_t}(1)|,$$

puis on prend son adhérence dans une complétion en 0 de $\coprod_{t \neq 0} |\mathcal{O}_{S_t}(1)|$; la limite est alors la fibre ($t = 0$) de cette adhérence. Bien entendu la limite obtenue dépend du choix de la complétion en 0, et un aspect important de notre travail est la construction d'une complétion telle que la variété de Severi limite paramètre des courbes d'allure raisonnable.

Pour fixer les idées, je donne ci-dessous (théorème (4.6)) les variétés de Severi limites correspondant au choix le plus simple de complétion :

$$(4.4.2) \quad \coprod_{t \in \mathbf{D}} |\mathcal{O}_{S_t}(1)| \cong \check{\mathbf{P}}^3 \times \mathbf{D}.$$

En fait pour obtenir cette version de la limite, nous avons dû tout d'abord calculer une bonne limite comme décrite au paragraphe ci-dessus, dans une autre complétion, et ensuite redescendre à $\coprod_{t \in \mathbf{D}} |\mathcal{O}_{S_t}(1)|$. Pour simplifier les choses je décris la limite en tant que cycle, mais il est possible d'être plus précis.

Dans toute la suite on considérera la situation suivante.

(4.5) Dégénérescence en un tétraèdre. Soit $S_0 \subseteq \mathbf{P}^3$ l'hypersurface d'équation $x_0x_1x_2x_3 = 0$, qu'on appelle un *tétraèdre*. On appelle *sommet* du tétraèdre l'un des quatre points $x_i = x_j = x_k = 0$, $0 \leq i < j < k \leq 3$, *arête* l'une des six droites $x_i = x_j = 0$, $0 \leq i < j \leq 3$, et *face* l'un des quatre plans $x_i = 0$, $0 \leq i \leq 3$.

On considère $\pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{D}$ définie comme en (4.4) par le pinceau engendré par S_0 et une quartique générale $S_1 \subseteq \mathbf{P}^3$. L'espace total \mathcal{S} possède 24 points doubles ordinaires p_1, \dots, p_{24}

aux points d'intersection de S_1 avec les arêtes de S_0 , comme on le voit en considérant l'équation (4.4.1). Ces points constituent une donnée importante puisque ce sont eux qui munissent le tétraèdre S_0 d'une structure de surface $K3$ dégénérée, mais je ne rentrerai pas ici dans ce genre de considération.

Enfin on notera \mathcal{L} le fibré inversible restriction à \mathcal{S} du tiré-en arrière de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(1)$ par la projection $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{P}^3$. La complétion (4.4.2) s'identifie au fibré projectif $\mathbf{P}(\pi_*\mathcal{L})$.

(4.6) Théorème [2]. *Soit $\pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{D}$ une famille de quartiques générales dégénérant vers un tétraèdre S_0 , définie par un pinceau comme en (4.4). Les limites au sens des cycles dans $|\mathcal{O}_{S_0}(1)| \cong \check{\mathbf{P}}^3$ des $V^\delta(S_t)$ lorsque t tend vers 0 sont les sommes de :*

($\delta = 1$)

- les 24 réseaux de plans passant par un point double p_i ;
- les 4 réseaux de plans passant par un sommet de S_0 , chacun avec multiplicité 3.

($\delta = 2$)

- les 240 pinceaux de plans passant par deux points doubles p_i, p_j qui ne sont pas sur la même arête de S_0 ;
- les 48 pinceaux de plans passant par un sommet de S_0 et un p_i qui ne sont pas reliés par une arête, chacun avec multiplicité 3 ;
- les 6 pinceaux de plans contenant une arête de S_0 , chacun avec multiplicité 16.

($\delta = 3$)

- les 1024 plans contenant trois points doubles p_i, p_j, p_k mais pas d'arête de S_0 ;
- les 192 plans contenant un sommet de S_0 et deux points doubles p_i, p_j , mais pas d'arête de S_0 , chacun avec multiplicité 3 ;
- les 24 plans contenant une arête de S_0 et un point double p_i , mais pas de face de S_0 , chacun avec multiplicité 16 ;
- les 4 faces de S_0 , chacune avec multiplicité 304.

(4.7) Twists. Pour construire un espace dans lequel les variétés de Severi limites paramètrent des courbes, nous opérons des éclatements sur $\mathbf{P}(\pi_*\mathcal{L}) \cong \check{\mathbf{P}}^3 \times \mathbf{D}$. Pour voir l'effet d'une telle modification, le plus simple est peut-être de suivre un exemple. Pour l'instant je passe outre un point technique qui sera résolu en (4.8).

Soit $[P] \in |\mathcal{O}_{S_0}(1)| \subseteq \mathbf{P}(\pi_*\mathcal{L})$ une face de S_0 . Visiblement ce point ne correspond pas à une courbe tracée sur S_0 , et effectivement nous allons l'éclater. Soit $\mathcal{L} \rightarrow \mathbf{P}(\pi_*\mathcal{L})$ cet éclatement, et $\mathcal{L} \rightarrow \mathbf{D}$ la composition avec la projection $\mathbf{P}(\pi_*\mathcal{L}) \rightarrow \mathbf{D}$. Le diviseur exceptionnel de \mathcal{L} est un \mathbf{P}^3 situé sur la fibre centrale de $\mathcal{L} \rightarrow \mathbf{D}$, qui s'identifie canoniquement au système linéaire $|\mathcal{L}(-P)|_{S_0}$.

Le fibré inversible $\mathcal{L}(-P)$ définit un modèle birationnel \mathcal{S}' de \mathcal{S} dans $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{D}$ qui est isomorphe à \mathcal{S} au dessus du disque épointé $\mathbf{D} - \{0\}$, mais dont la fibre centrale est $S'_0 \neq S_0$. On a donc deux familles

$$\mathcal{S}, \mathcal{S}' \subseteq \mathbf{P}^3 \times \mathbf{D}$$

de surfaces, telles que S_t et S'_t sont isomorphes comme surfaces polarisées pour tout $t \neq 0$, mais $S_0 \neq S'_0$: ceci semble contredire la propriété du schéma de Hilbert des surfaces dans \mathbf{P}^3 ! Bien sûr il n'en est rien, le point étant que S_t et S'_t diffèrent par un automorphisme de \mathbf{P}^3 qui peut varier avec t . Nous avons là une illustration concrète du fait que S_0 et S'_0 ne sont pas stables en tant que points de $|\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(4)|$ sur lequel agit $\mathrm{SL}(4)$.

On retiendra en tout cas que la dégénérescence \mathcal{S} a dans ses gènes d'autres dégénérescences, qu'il est nécessaire de considérer pour obtenir une bonne description des variétés de Severi limites.

(4.8) Petites résolutions. Avant de décrire explicitement le modèle S'_0 et le système linéaire $|\mathcal{L}(-P)|_{S'_0}|$, il faut résoudre les singularités de \mathcal{S} (c'est le petit problème technique que j'ai provisoirement fait semblant de ne pas voir ci-dessus). Pour cela on choisit une petite résolution $\tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ des points doubles ordinaires de \mathcal{S} à l'intersection des arêtes de S_0 avec S_1 (on peut aussi prendre simplement la grosse résolution, voir (4.15)) : ceci remplace chaque point p_i par un \mathbf{P}^1 situé sur l'une ou l'autre des faces P_i et P'_i telles que $p_i \in P_i \cap P'_i$; si ce \mathbf{P}^1 est situé sur P_i , les transformées propres de P_i et P'_i dans $\tilde{\mathcal{S}}$ sont l'éclatement de P_i en p_i et P'_i elle-même. Je note habituellement E_i ce \mathbf{P}^1 exceptionnel. Le choix de la petite résolution est essentiellement indifférent pour ce qui nous concerne, même s'il peut avoir des conséquences importantes par ailleurs.

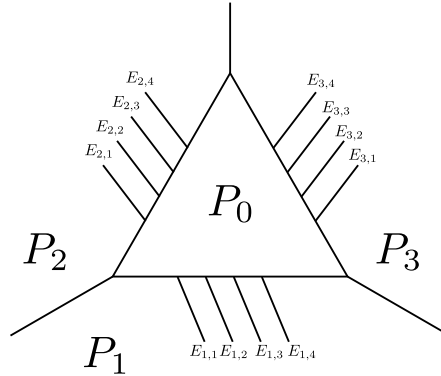
Par abus de notation je continue à noter \mathcal{L} son tiré-en-arrière sur $\tilde{\mathcal{S}}$, et S_0 sa transformée stricte dans $\tilde{\mathcal{S}}$.

(4.9) Quartiques avec une configuration de points base sur un triangle. Pour comprendre le système linéaire $|\mathcal{L}(-P)|_{S'_0}|$ il faut déterminer la restriction de $\mathcal{L}(-P)$ à chaque composante de la fibre centrale de \mathcal{S} , ou plutôt $\tilde{\mathcal{S}}$. Le point clef est que les fibres F de $\tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbf{D}$ sont linéairement équivalentes à 0 puisque la base est le disque (si on préfère on peut utiliser le fait, valable sur une base quelconque, que $F^2 = 0$).

Notons P_0, P_1, P_2, P_3 les quatre faces du tétraèdre (ou plutôt leurs transformées strictes dans $\tilde{\mathcal{S}}$), et regardons $\mathcal{L}(-P_0)$. Puisque la fibre centrale est la somme des quatre faces, on a

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 \sim 0 \quad \text{donc} \quad \mathcal{L}(-P_0) = \mathcal{L}(P_1 + P_2 + P_3).$$

La restriction de \mathcal{L} à chacune des faces est le fibré associé à la classe H tirée-en-arrière d'une droite de \mathbf{P}^2 (chaque P_i étant à présent un plan éclaté en quelques points). Disons qu'on a choisi la petite résolution $\tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ de sorte que les courbes exceptionnelles situées autour de P_0 soient distribuées comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Alors on a

$$\mathcal{L}(-P_0)|_{P_i} = \begin{cases} \mathcal{O}_{P_0}(4H) & \text{si } i = 0 \\ \mathcal{O}_{P_i}(\sum_{1 \leq j \leq 4} E_{i,j}) & \text{si } i \neq 0. \end{cases}$$

Tenant compte des conditions de recollement le long des intersections $P_i \cap P_j$, on obtient que $|\mathcal{L}(-P_0)|_{S'_0}|$ est l'ensemble des diviseurs constitués (i) de la réunion des quatre \mathbf{P}^1 exceptionnels $E_{i,j}$ sur chacune des trois faces P_i , $i \neq 0$, et (ii) d'une quartique plane passant par les douze points $E_{i,j} \cap P_0$ sur la face P_0 .

Puisque les douze points $E_{i,j} \cap P_0$ sont découpés par la quartique plane $S_1 \cap P_0$ sur le triangle $(P_1 + P_2 + P_3) \cap P_0$, le système linéaire $|\mathcal{L}(-P_0)|_{S'_0}|$ est de dimension 3. Il contracte les trois

faces P_i , $i \neq 0$, et donne un modèle birationnel de P_0 dans \mathbf{P}^3 comme surface quartique avec un point triple, image de la contraction du triangle $(P_1 + P_2 + P_3) \cap P_0$. La dégénérescence S'_t des S_t déterminée par $\mathcal{L}(-P_0)$ est cette quartique rationnelle.

La multiplicité 304 des faces dans le théorème (4.6) provient de l'énoncé suivant, que nous démontrons à son tour par dégénérescence.

(4.10) Théorème [2]. *Soit $T \subseteq \mathbf{P}^2$ la somme de trois droites indépendantes, et Z le diviseur de degré 12 découpé sur T par une quartique plane générale. Le système linéaire $\mathcal{L}_0 = |\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(4) \otimes \mathcal{I}_Z|$ est de dimension 3. Pour $\delta = 1, 2, 3$, soit $V^\delta(\mathcal{L}_0)$ l'adhérence de Zariski du lieu des courbes irréductibles δ -nodales dans \mathcal{L}_0 . La variété $V^\delta(\mathcal{L}_0)$ a codimension δ et degré 21 pour $\delta = 1$, 132 pour $\delta = 2$, et 304 pour $\delta = 3$.*

Ces degrés diffèrent de ceux qu'on obtient en prenant pour Z onze³¹ points généraux dans le plan, qui sont respectivement 27, 225, 675 pour $\delta = 1, 2, 3$. Dans le cadre du théorème, les courbes constituées de T plus une droite forment des familles de dimensions trop grandes (pour $\delta > 1$) de courbes δ -nodales passant par Z . Il est possible de voir les variétés $V^\delta(\mathcal{L}_0)$ pour $\delta < 3$ dans le cadre de notre problème de départ, mais il vaut mieux ne pas rentrer ici dans ce genre de subtilité.

(4.11) Bon modèle pour la dégénérescence \mathcal{S} . Une fois effectuées pour chacune des faces l'opération décrite en (4.7) et (4.9) ci-dessus, on dispose d'une dégénérescence des $|\mathcal{O}_{S_t}(1)|$ dans laquelle tous les points de la fibre centrale correspondent à une courbe sur S_0 . Cependant il est assez clair que parmi ces courbes, certaines ne vont pas nous convenir (par exemple, celles qui contiennent une arête de S_0). Pour les remplacer par des courbes convenables, nous modifions la dégénérescence \mathcal{S} (ou $\tilde{\mathcal{S}}$) puis nous effectuons de nouvelles opérations du même type que celles effectuées pour les faces.

(4.11.1) *Arêtes.* Pour s'occuper des sections de S_0 par un plan contenant une arête, il faut effectuer le changement de base $t \mapsto t^2$ sur $\tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbf{D}$, puis résoudre les singularités de l'espace total. Essentiellement, on obtient au dessus de chaque arête $P_i \cap P_j$ une surface exceptionnelle W_{ij} telle que le twist $\mathcal{L}(-W_{ij})$ donne une dégénérescence $S_0^{ij} \subseteq \mathbf{P}^3$ des S_t dont les sections hyperplanes permettent de comprendre la contribution aux variétés de Severi limites des sections de S_0 contenant l'arête $P_i \cap P_j$. Le modèle S_0^{ij} est une surface quartique rationnelle, possédant une droite double D correspondant à l'arête opposée à $P_i \cap P_j$ dans S_0 , et deux points triples sur D correspondant aux faces P_i et P_j respectivement.

Pour comprendre la contribution de S_0^{ij} aux variétés de Severi limites, il faut considérer sa projection depuis un point général de D , qui donne un revêtement double de \mathbf{P}^2 , ramifié au dessus d'une sextique $B \subseteq \mathbf{P}^2$, telle que $B = B_0 + B_1 + B_2$ où B_0 est une quartique ayant un nœud p , B_1 et B_2 sont les composantes du cône tangent de B_0 en p , et les deux branches locales de B_0 en p ont un point d'inflexion, de sorte que $B_i \cap B_0 = \{p\}$ pour $i = 1, 2$. Ceci permet d'obtenir la multiplicité 16 pour les pinceaux de plans contenant une arête dans le théorème (4.6), à l'aide d'un résultat analogue au théorème (4.10) (mais nettement plus simple).

(4.11.2) *Sommets.* Pour s'occuper des sections de S_0 passant par un sommet, il faut effectuer le changement de base $t \mapsto t^3$ sur $\tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbf{D}$, puis résoudre les singularités de l'espace total. Au dessus de chaque sommet $P_i \cap P_j \cap P_k$ on a une surface exceptionnelle T_{ijk} , et le twist $\mathcal{L}(-T_{ijk})$ permet de comprendre la contribution du réseau des hyperplans passant par $P_i \cap P_j \cap P_k$. Le modèle $S_0^{ijk} \subseteq \mathbf{P}^3$ correspondant est la somme d'une cubique $T = (x_1 x_2 x_3 = x_0^3)$ et d'un plan

31. douze points intersection complète d'une cubique et d'une quartique comme dans le théorème imposent seulement onze conditions indépendantes aux quartiques planes

P ; la cubique T possède trois points doubles de type A_2 , et contient trois droites qui relient deux à deux les points doubles; le plan P est le plan engendré par ces trois points, et correspond à la face de S_0 opposée au sommet $P_i \cap P_j \cap P_k$.

(4.11.3) *Bon modèle global.* En fait il est nécessaire d'avoir un modèle de \mathcal{S} permettant de faire toutes ces opérations ensemble. On effectue donc le changement de base $t \mapsto t^6$ sur $\tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbf{D}$, puis on résout les singularités de l'espace total. Ensuite il faut encore *flopper* quelques courbes de type $(-1, -1)$. On obtient une dégénérescence des S_t dont la fibre centrale est représentée sur la Figure 4.1 (aux flops près). La représentation est semblable à un planisphère, sur lequel les pôles nord et sud se trouvent au centre des faces P_3 et P_4 , et la ligne de changement de date au milieu de l'océan pacifique correspond à l'arête $P_3 \cap P_4$. En poursuivant notre travail, nous avons par la suite mis au point une représentation un peu moins baroque et plus utilisable, voir Figure 5.5.

Ceci permet de fabriquer une dégénérescence des $|O_{S_t}(1)|$ faisant apparaître tous les twists mentionnés ci-dessus de la manière suivante. D'abord on éclate $\mathbf{P}(\pi_*\mathcal{L})$ aux points correspondant aux faces de S_0 , puis on éclate les droites correspondant aux pincesaux d'hyperplans contenant une arête, et enfin on éclate les plans correspondant aux réseaux d'hyperplans contenant un sommet.

(4.12) Courbes admissibles dans une bonne limite de variété de Severi. Dans le cas de la dégénérescence en un tétraèdre, la construction décrite ci-dessus donne une limite pour les variétés de Severi dans laquelle chaque composante paramètre des courbes nodales plongées dans un modèle \tilde{S}_0 dominant le tétraèdre S_0 (\tilde{S}_0 est la fibre centrale de la famille construite en (4.11.3)). En général il est nécessaire d'admettre en outre des singularités tacnodales le long des arêtes du modèle \tilde{S}_0 , même si l'on considère des sections hyperplanes de dégénérescences en une union de plans.

C'est le phénomène identifié par Ran, Caporaso–Harris, et Vakil. Soit $\mathcal{S} \rightarrow \mathbf{D}$ une famille de surfaces telle que les S_t , $t \neq 0$, sont des surfaces lisses et la fibre centrale S_0 est une réunion de deux surfaces lisses S'_0 et S''_0 se rencontrant transversalement le long d'une courbe lisse B . Soit \mathcal{L} un fibré inversible sur \mathcal{S} , et considérons la famille de variétés de Severi

$$\mathcal{V} = \coprod_{t \neq 0} V^1(S_t, L_t) \longrightarrow \mathbf{D} - \{0\}.$$

Soit V_{tac} la famille des courbes $[C_0] = [C'_0 \cup C''_0] \in |L_0|$ union de deux courbes lisses $C'_0 \subseteq S'_0$ et $C''_0 \subseteq S''_0$, toutes les deux tangentes à B en un point $p \in B$ et transverses sinon, voir figure 4.2 ci-dessous. Alors, sous des hypothèses convenables, V_{tac} apparaît avec multiplicité 2 dans la limite des $V^1(S_t, L_t)$ lorsque t tend vers 0.

Par exemple, dans une dégénérescence comme dans (4.4) de surfaces quartiques $S_t \subseteq \mathbf{P}^3$ en une union transverse de deux quadriques $S_0 = Q' \cup Q''$, la famille des plans tangents à la courbe elliptique $B = Q' \cap Q''$ apparaît avec multiplicité 2 dans la limite des $V^1(S_t)$.

Ce phénomène s'observe en étudiant les déformations de la courbe C_0

$$\begin{cases} x = y + z^2 \\ xy = t \\ t = 0 \end{cases}$$

dans la famille de surfaces $xy = t$ dans l'espace affine $\mathbf{A}^3_{xyz} \times \mathbf{D}$. On constate alors que la courbe C_0 se déforme en courbes 1-nodales dans les fibres voisines, mais sous la forme d'une famille $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{D}$ telle que pour $t \neq 0$, la courbe C_t est la somme de deux courbes 1-nodales C_t^+ et C_t^- .

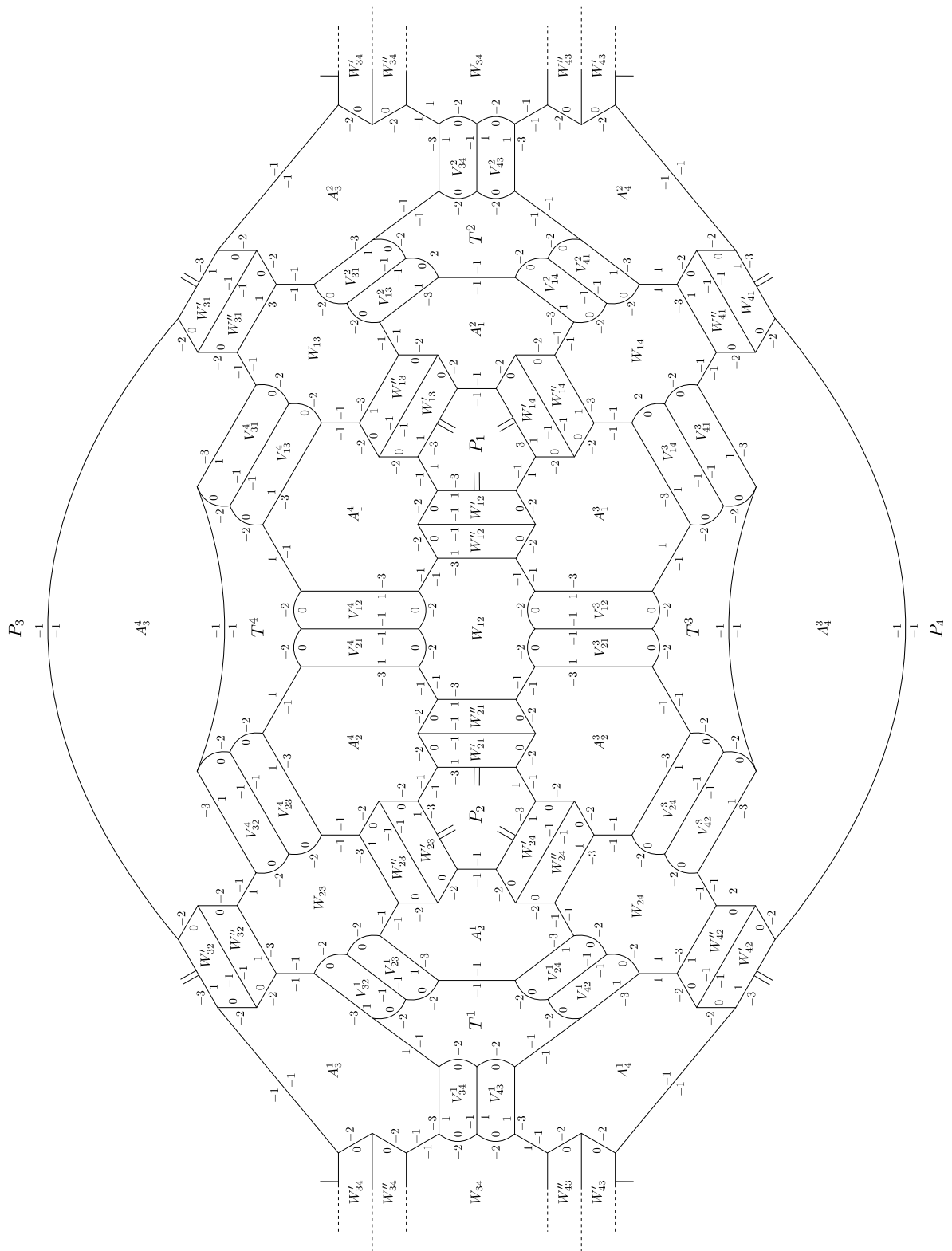


Figure 4.1: *Il granchio* (le crabe), bon modèle pour la dégénérescence en un tétraèdre

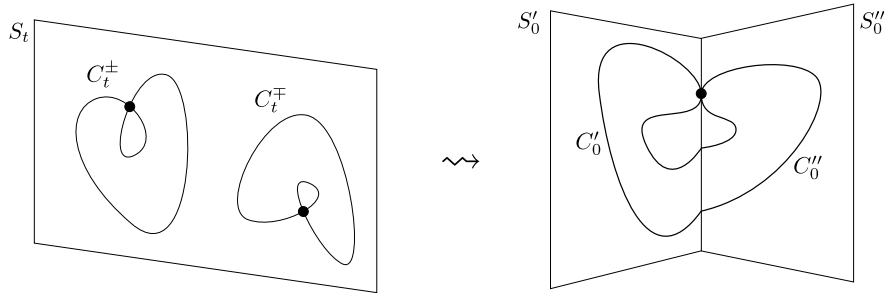


Figure 4.2: 2-famille de courbes nodales dégénérant en une courbe tacnodale

Certes le théorème de réduction semi-stable nous dit qu’il est possible de modifier cette famille pour que la fibre centrale soit nodale. Il est possible aussi de satisfaire l’exigence supplémentaire que la fibre centrale de la famille de surfaces soit à croisements normaux simples, et que la limite du nœud des courbes C_t^\pm , $t \neq 0$, se trouve en un point lisse de la fibre centrale. Mais le problème est que pour construire un tel modèle il faut effectuer des transformations centrées au point tacnodal, et il est donc illusoire d’espérer faire une telle réduction semi-stable simultanément pour toutes les courbes tacnodales paramétrées par V_{tac} . Il faut donc se résoudre à accepter parmi nos “modèles stables de courbes nodales” ces courbes tacnodales.

Les différentes réductions mentionnées ci-dessus sont étudiées en détail dans les notes [TV.16] écrites avec Ciro Ciliberto et Concettina Galati.

Ce phénomène se généralise au cas des points m -tacnodaux le long d’une courbe double, dont les équations locales dans la fibre centrale sont $xy = x - y + z^m = 0$, qui se déforment en m courbes $(m - 1)$ -nodales dans les fibres voisines. Précisément, on a le résultat suivant.

(4.13) Proposition ([Gal09, GK14] et [TV.5]). *Soit $\mathcal{S} \rightarrow \mathbf{D}$ une famille de surfaces lisses S_t dégénérant en S_0 à croisements normaux, et \mathcal{L} un fibré inversible sur \mathcal{S} . Soit A un diviseur effectif supporté sur S_0 . Soit $V_0 \subseteq |\mathcal{L}(-A)|_{S_0}|$ une famille irréductible maximale de courbes possédant τ_m points m -tacnodaux pour $m = 1, \dots, k$ et nodales par ailleurs, et possédant δ' nœuds situés sur le lieu lisse de S_0 . On note*

$$\delta = \delta' + \sum_{1 \leq m \leq k} \tau_m \cdot (m - 1) \quad \text{et} \quad \mu = \prod_{1 \leq m \leq k} m^{\tau_m}.$$

On suppose :

(i) $h^0(S_0, \mathcal{L}(-A)|_{S_0}) = h^0(S_t, \mathcal{L}|_{S_t})$ pour tout $t \in \Delta^*$; et

(ii) V_0 a codimension δ dans $|\mathcal{L}(-A)|_{S_0}|$.

Alors V_0 apparaît avec multiplicité μ dans la limite au sens des cycles des variétés de Severi $V^\delta(S_t, L_t)$.

(4.14) Conjecture. Nous conjecturons [2, conj. 2.19] que pour une dégénérescence comme dans la proposition précédente, sous des hypothèses adéquates encore à déterminer, il existe un modèle $\tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbf{D}$ obtenu à partir de $\mathcal{S} \rightarrow \mathbf{D}$ par changements de bases ramifiés au dessus de $0 \in \mathbf{D}$ et modifications birationnelles concentrées sur la fibre centrale, tel que pour tout $\delta \leq \dim(|L_0|)$ la limite des variétés de Severi $V^\delta(S_t, L_t)$ est une somme de composantes du type décrit en (4.13).

Pour l’instant, plutôt que d’essayer de démontrer cette conjecture dans un cadre général nous nous sommes attachés à la mettre en œuvre en pratique pour différents exemples de dégénérescences de surfaces $K3$. Au sujet de ces expérimentations, je renvoie vers la section 5.4.

En guise de conclusion à cette section, je règle un point de détail à propos des courbes passant par un point singulier de l'espace total qui aura peut-être troublé le lecteur.

(4.15) Complément : contribution des points singuliers de l'espace total. On a vu en (4.5) que dans le contexte de (4.4), si la fibre centrale S_0 est un diviseur à croisements normaux dans l'espace total \mathcal{S} alors ce dernier possède des points doubles ordinaires à l'intersection du membre général S_1 avec les courbes doubles de S_0 . Dans les listes du théorème (4.6) les sections hyperplanes passant par ces points apparaissent dans la limite des variétés de Severi; moralement, un point de passage simple par un point singulier de \mathcal{S} compte comme un nœud. Ceci se comprend assez simplement en accord avec la conjecture (4.14).

On peut au choix considérer une petite résolution $\tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ de ces points singuliers comme dans (4.8), ou éclater brutalement ces points. Considérons un point double ordinaire de \mathcal{S} sur la courbe double $S'_0 \cap S''_0$, voir la figure 4.3. Dans le premier cas (dessiné en bas), disons qu'on a choisi de placer la courbe exceptionnelle sur S''_0 , et appelons la E'' ; alors S''_0 est remplacée dans la petite résolution par son éclatement \tilde{S}''_0 en un point lisse, et E'' est une (-1) -courbe. Une section hyperplane de S_0 passant par ce point singulier donne lieu dans \tilde{S}_0 à une courbe contenant E'' et possédant un nœud en un point lisse de \tilde{S}''_0 : rien de mystérieux donc.

Dans le contexte de l'éclatement pur et simple du point double (dessiné en haut), la "grosse résolution", on introduit une nouvelle composante irréductible dans la fibre centrale de $\tilde{\mathcal{S}}$, la surface exceptionnelle isomorphe à $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Dans ce cas les sections hyperplanes passant par ce point singulier doivent être considérées dans le twist approprié, $\mathcal{L}(-(E' \times E''))$, qui donne des courbes de bidegré $(1, 1)$ sur le $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ exceptionnel: on peut faire apparaître un nœud en un point lisse de la surface exceptionnelle comme indiqué sur le dessin.

La grosse résolution présente l'avantage de permettre de comprendre une version plus générale de cette situation, disons lorsqu'on considère une section hyperplane avec un point double en l'un des points singuliers de \mathcal{S} , c.-à-d. une section par un hyperplan tangent à S'_0 et à S''_0 au point singulier (cette situation a codimension attendue 4, et ne peut pas se produire dans \mathbf{P}^3 si les intersections sont transverses). Dans ce cas le twist à considérer est $\mathcal{L}(-2(E' \times E''))$, on a des courbes de bidegré $(2, 2)$ sur le $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ exceptionnel, et on peut faire apparaître 4 nœuds en des points lisses de $E' \times E''$. Plus généralement un point de multiplicité m en un point singulier sur S'_0 et S''_0 donnera lieu à m^2 nœuds.

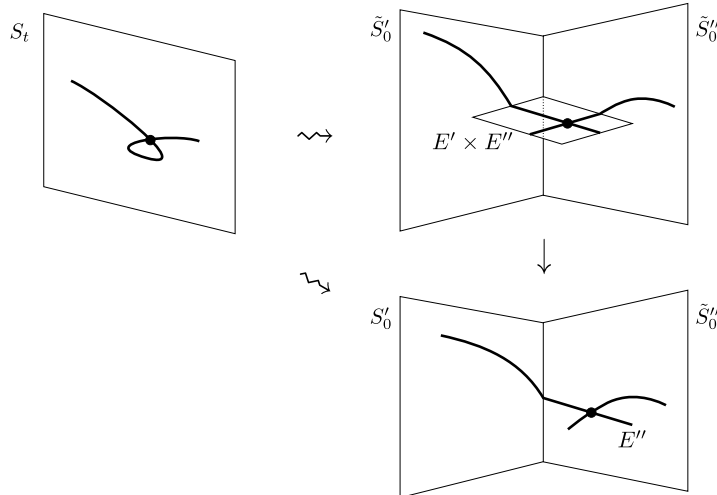


Figure 4.3: Deux modèles pour une courbe nodale tendant vers une courbe passant par un point singulier de l'espace total

4.2 – Théorie de l'élimination

Dans l'article [8] nous introduisons avec Laurent Busé une notion de discriminant réduit, en nous inspirant d'une formule donnée en passant par Salmon dans son livre [Sa862]. Il s'agit d'un discriminant défini pour des polynômes ayant un point de multiplicité s , et qui s'annule si et seulement si il y a une singularité supplémentaire.

Nous étudions ses propriétés d'homogénéité par rapport à différentes graduations. Ceci nous permet de reprendre plusieurs applications énumératives données par Salmon. Nous les généralisons, et profitons de l'occasion pour resserrer quelques vis ici ou là.

Discriminants réduits

(4.16) Le point de départ de l'article [8] est la volonté de comprendre la formule suivante donnée par Salmon [Sa862, n° 605], et longtemps restée pour moi un hiéroglyphe indéchiffrable.

Soit $C \subseteq \mathbf{P}^2$ une courbe plane réduite ; moyennant un choix convenable de coordonnées homogènes $(x : y : z)$, son équation peut-être mise sous la forme

$$(4.16.1) \quad f(x, y, z) = Tz^{d-1}y + \frac{1}{2}z^{d-2}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) + \sum_{k \geq 3} z^{d-k} f_k(x, y) = 0,$$

chaque $f_k(x, y)$ étant homogène de degré k en x, y . Salmon énonce comme un fait tout-à-fait ordinaire, et donc sans aucune indication, que le discriminant de $f(x, y, z)$ s'écrit

$$(4.16.2) \quad \text{Disc}(f) = T^2 A(B^2 - AC)^2 \varphi + T^3 \psi,$$

où φ est "le discriminant quand T s'annule".

Si $T = 0$ alors la courbe C est singulière au point $(0 : 0 : 1)$, donc dans ce cas le discriminant de f s'annule. Nous allons voir que le polynôme (en les coefficients de f) φ est en fait un discriminant réduit, et s'annule si et seulement si f possède une singularité en plus du point double ordinaire en $(0 : 0 : 1)$ (voir (4.19) pour un énoncé précis). Nous obtenons la formule (4.16.2) comme un corollaire de notre formule (4.20.1).

Pour décrire la notion de discriminant réduit, que nous introduisons dans [8], il me semble nécessaire de commencer par revenir sur les définitions des résultants et discriminants classiques.

(4.17) **Formes d'inertie et résultant.** Considérons f_1, \dots, f_r des polynômes homogènes *génériques* de degrés d_1, \dots, d_r en les variables (x_0, \dots, x_n) : ceci signifie que les coefficients de chacun des f_j sont des indéterminées $u_{j,\alpha}$, de sorte que f_j est le point générique de l'espace affine des polynômes homogènes de degré d_j en $n + 1$ variables :

$$f_j = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^{n+1}, |\alpha|=d_j} u_{j,\alpha} \mathbf{x}^\alpha,$$

où $|\alpha| = \alpha_0 + \dots + \alpha_n$ et $\mathbf{x}^\alpha = x_0^{\alpha_0} \dots x_n^{\alpha_n}$ pour tout $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^{n+1}$.

On note $A_{\mathbf{Z}} := \mathbf{Z}[u_{j,\alpha} : j = 1, \dots, r, |\alpha| = d_j]$ l'anneau des coefficients des polynômes f_1, \dots, f_r . Les *formes d'inertie*³² des polynômes f_1, \dots, f_r sont les éléments de degré 0 de l'idéal saturé par rapport à x_0, \dots, x_n de l'idéal engendré par les f_j , c.-à-d. les éléments de l'idéal

$$\mathfrak{I}_{\mathbf{Z}} = ((f_1, \dots, f_r) : (x_0, \dots, x_n)^\infty) \cap A_{\mathbf{Z}}.$$

À présent soit \mathbf{k} un corps, et $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_r \in \mathbf{k}[\mathbf{x}]$ des polynômes homogènes de degrés d_1, \dots, d_r . Ces polynômes peuvent s'obtenir en spécialisant les f_i , c.-à-d. en évaluant chaque indéterminée

32. en allemand *Trägheitsform*, dans la terminologie de Van Der Waerden

$u_{j,\alpha}$ en une valeur $a_{j,\alpha} \in \mathbf{k}$. Le sous-schéma de $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^n$ défini par $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_r$ est non-vide si et seulement si pour toute forme d'inertie $T \in \mathfrak{I}_{\mathbf{Z}}$, la spécialisation de T déterminée par les $a_{j,\alpha}$ est nulle.

Lorsque $r = n + 1$ l'idéal $\mathfrak{I}_{\mathbf{Z}}$ est principal. Il a un unique générateur (au signe près) $\text{Res}_{d_1, \dots, d_{n+1}} \in A_{\mathbf{Z}}$, qu'on appelle *résultant* (on pourra noter simplement Res si les degrés sont clairs d'après le contexte). Étant donné $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{n+1} \in \mathbf{k}[\mathbf{x}]$, on définit leur résultant $\text{Res}_{d_1, \dots, d_{n+1}}(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{n+1}) \in \mathbf{k}$ comme l'évaluation de $\text{Res} \in A_{\mathbf{Z}}$ en les coefficients des \tilde{f}_i .

(4.18) Discriminant. Soit f le polynôme homogène générique de degré d en (x_0, \dots, x_n) , et $A_{\mathbf{Z}}$ l'anneau engendré par ses coefficients. On définit le discriminant en considérant l'idéal

$$\mathfrak{D}_{\mathbf{Z}} = ((f, \partial_0 f, \dots, \partial_n f) : (x_0, \dots, x_n)^\infty) \cap A_{\mathbf{Z}}$$

(c'est l'idéal d'inertie de $n+2$ polynômes en $n+1$ variables, liés entre eux par la relation d'Euler). Cet idéal est premier et principal, on appelle *discriminant* son générateur, noté $\text{Disc}_d \in A_{\mathbf{Z}}$ (ou seulement Disc si le degré est clair).

On peut calculer le discriminant comme un résultant en utilisant l'une ou l'autre des formules

$$(4.18.1) \quad \text{Res}(\partial_0 f, \dots, \partial_n f) = d^{e(n,d)} \cdot \text{Disc}_d$$

$$(4.18.2) \quad \text{Res}(f, \partial_1 f, \dots, \partial_n f) = \text{Disc}_d(f) \cdot \text{Disc}_d(\bar{f}),$$

où $e(n, d) = \frac{(d-1)^{n+1} - (-1)^{n+1}}{d} \in \mathbf{Z}$, et $\bar{f} = f(0, x_1, \dots, x_n) \in A_{\mathbf{Z}}[x_1, \dots, x_n]$. La première formule semble plus agréable car ne dépendant pas du choix d'une indéterminée préférée, mais pose le problème théorique d'identifier le facteur $d^{e(n,d)}$ pour obtenir un discriminant défini sur \mathbf{Z} et satisfaisant à de bonnes propriétés universelles.

(4.19) Discriminant réduit. On va définir le discriminant réduit par une formule similaire à (4.18.2) mettant en jeu un résultant réduit. Cette notion remonte à l'article de Zariski [Zar37] (bien postérieur à la publication du livre de Salmon), et a ensuite été reprise par Ould Mohamdi [Oul88] dans sa thèse dirigée par Jouanolou.

Dans le cadre introduit en (4.17), avec $r = n + 1$, pour tout $i = 1, \dots, n + 1$ on fixe $s_i \leq d_i$, et on considère la troncature h_i de f_i à l'ordre $d_i - s_i$:

$$\begin{aligned} f_i &= x_0^{d_i} f_{i,0} + \dots + x_0^{d_i - s_i} f_{i,s_i} + \dots + f_{i,d_i} \\ h_i &= x_0^{d_i - s_i} f_{i,s_i} + \dots + f_{i,d_i}, \end{aligned}$$

où chaque $f_{i,k}$ est homogène de degré k en (x_1, \dots, x_n) . On considère l'idéal

$$\mathfrak{Q}_{\mathbf{Z}} = ((h_1, \dots, h_{n+1}) : (x_1, \dots, x_n)^\infty) \cap A_{\mathbf{Z}}$$

(noter qu'on sature par rapport à (x_1, \dots, x_n) et non pas (x_0, \dots, x_n)). À nouveau il est premier et principal, et son générateur $\text{redRes}_{d_1, \dots, d_{n+1}}^{s_1, \dots, s_{n+1}} \in A_{\mathbf{Z}}$ est le résultant réduit de h_1, \dots, h_{n+1} . Chaque h_i possède un point de multiplicité s_i en $(1 : 0 : \dots : 0)$, et le résultant réduit s'annule dans une spécialisation correspondant à $\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_{n+1} \in \mathbf{k}[\mathbf{x}]$ si et seulement si les hypersurfaces correspondantes dans \mathbf{P}^n ont un point d'intersection en plus du point de multiplicité $s_1 \cdots s_{n+1}$ en $(1 : 0 : \dots : 0)$, éventuellement infiniment proche.

Pour la définition du discriminant réduit on considère de même

$$\begin{aligned} f &= x_0^d f_0 + \dots + x_0^{d-s} f_s + \dots + f_d \\ h &= x_0^{d-s} f_s + \dots + f_d. \end{aligned}$$

Nous démontrons [8, Prop. 2.8] que le résultant réduit $\text{redRes}(h, \partial_1 h, \dots, \partial_n h)$ est divisible par les deux discriminants $\text{Disc}(f_s)$ et $\text{Disc}(f_d)$ des parties homogènes de degrés s et d de f . On définit alors le *discriminant réduit* redDisc_d^s par la formule

$$(4.19.1) \quad \text{redDisc}_d^s = \frac{\text{redRes}(h, \partial_1 h, \dots, \partial_n h)}{\text{Disc}(f_s) \cdot \text{Disc}(f_d)} \in A_{\mathbf{Z}}.$$

La divisibilité par $\text{Disc}(f_d)$ est un artefact technique similaire à l'apparition du facteur $\text{Disc}(\bar{f})$ dans (4.18.2). En revanche la divisibilité par $\text{Disc}(f_s)$ correspond à une réalité géométrique, à savoir le fait que l'hypersurface des polynômes ayant un point de multiplicité s en $(1 : 0 : \dots : 0)$ plus une autre singularité est réductible, une composante correspondant aux polynômes définissant une hypersurface dont le cône tangent en $(1 : 0 : \dots : 0)$ est singulier.

(4.19.2) *Remarque.* Nos résultats ne garantissent en aucun cas l'irréductibilité du discriminant réduit. C'est une question que nous sommes en train d'étudier avec Laurent Busé, ainsi que sur une étude détaillée et approfondie de ce nouveau polynôme éliminant.

(4.20) Graduation de Zariski. Dans son article [Zar37], Zariski introduit une graduation sur l'anneau des coefficients $A_{\mathbf{Z}}$ qui fait apparaître le résultant réduit comme terme de plus bas degré du résultant classique. C'est un aspect important de sa théorie des résultants réduits, puisque c'est ce qui permet son calcul en pratique.

Dans le cadre correspondant au discriminant, la graduation de Zariski est déterminée par

$$\text{poids}(u_{\alpha}) = \max(\alpha_0 - d + s)$$

pour tout $u_{\alpha} \in A_{\mathbf{Z}}$, ce qu'on peut visualiser comme ci-dessous :

$$f = \underbrace{x_0^d f_0}_{\text{poids}(\text{coeffs})=s} + \dots + \underbrace{x_0^{d-s+1} f_{s-1}}_{\text{poids}(\text{coeffs})=1} + \underbrace{x_0^{d-s} f_s + \dots + f_d}_{\text{poids}(\text{coeffs})=0}.$$

Pour donner la formule qui nous intéresse, il faut encore introduire

$$g = \frac{1}{x_0^{d-s}} (x_0^d f_0 + \dots + x_0^{d-s} f_s)$$

qui est homogène de degré s (noter que f_s apparaît parmi les termes de g et de h).

Busé et Jouanolou ont démontré [BJ14, Thm. 4.25] que la valuation de $\text{Disc}(f) \in A_{\mathbf{Z}}$ pour la graduation de Zariski est $s(s-1)^n$, et ont déterminé sa partie homogène de plus bas poids. Avec notre définition (4.19.1), cela donne :

$$(4.20.1) \quad \text{Disc}_d(f) = \text{Disc}_s(g) \cdot \text{Disc}_s(f_s)^2 \cdot \text{redDisc}_d^s(h) + (\text{termes de poids} > s(s-1)^n).$$

En prenant $s = 2$, et en spécialisant les coefficients de f pour respecter la forme normale donnée en (4.16.1), on obtient une formule généralisant la formule de Salmon (A) au cas d'un nombre arbitraire de variables.

Pour finir, je souligne le fait que la donnée des poids des résultants et discriminants réduits relativement à la graduation de Zariski, ainsi qu'à un certain nombre de variantes, est un élément important pour les applications énumératives.

Applications énumératives

En suivant la route tracée par Salmon, nous obtenons les deux applications suivantes de la théorie du discriminant réduit (théorèmes (4.22) et (4.24)). Avant de procéder j'introduis le formalisme de la polarité.

(4.21) Formulaire sur la polarité. Soit f un polynôme homogène de degré d en $n+1$ variables $(x_0, \dots, x_n) = \mathbf{x}$. Pour $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbf{C}^{n+1}$, on définit

$$(4.21.1) \quad D_{\mathbf{a}}f = a_0 \partial_0 f + \dots + a_n \partial_n f,$$

puis pour $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathbf{C}^{n+1}$, $D_{\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_k} f = (D_{\mathbf{a}_1} \circ \dots \circ D_{\mathbf{a}_k})(f)$, ce qui définit par linéarité un accouplement

$$D : \text{Sym}^k(\mathbf{C}^{n+1}) \otimes \text{Sym}^d(\check{\mathbf{C}}^{n+1}).$$

Avec ces notations, on a la version suivante de la formule de Newton : pour tout $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbf{C}$ et $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r \in \mathbf{C}^{n+1}$,

$$(4.21.2) \quad \begin{aligned} f(\alpha_0 \mathbf{x}_0 + \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_r \mathbf{x}_r) &= \sum_{k=0}^d \frac{1}{k!} \alpha_0^{d-k} (D_{(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_r \mathbf{x}_r)^k} f)(\mathbf{x}_0) \\ &= \sum_{k=0}^d \alpha_0^{d-k} \sum_{k_1 + \dots + k_r = k} \frac{1}{k_1! \dots k_r!} \alpha_1^{k_1} \dots \alpha_r^{k_r} (D_{\mathbf{x}_1^{k_1} \dots \mathbf{x}_r^{k_r}} f)(\mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

Pour $X \subseteq \mathbf{P}^n$ hypersurface d'équation f de degré d , et $a = (\mathbf{a}), x = (\mathbf{x}) \in \mathbf{P}^n$ on s'autorise à considérer $(D_{\mathbf{a}^k} f)(\mathbf{x})$ comme polynôme bi-homogène de bi-degré $(k, d-k)$ de la variable (a, x) , noté $(D_{a^k} f)(x)$. Pour $a \in \mathbf{P}^n$ fixé, on appelle k -ème *polaire de X par rapport à a* l'hypersurface de degré $d-k$ définie par $D_{a^k} f$, et on la note $D_{a^k} X$. Un aspect important de cette notion du point de vue des problèmes énumératifs considérés ici est que l'intersection $X \cap D_a X$ est l'ensemble des points $x \in X$ tels que a appartient à l'hyperplan $\mathbf{T}_x X$ tangent à X en x . C'est ainsi qu'on obtient le nombre $d(d-1)^2$ de (4.3).

D'autre part, on appelle k -ième *polaire de X en a* l'hypersurface de degré k définie par le polynôme en x , $(D_{x^k} f)(a)$. On la note $D^k X(a)$. L'intérêt de cette notion pour nous est que pour tout $a \in X$ et $b \in \mathbf{P}^n$, la droite $\langle a, b \rangle$ rencontre X avec multiplicité au moins $m+1$ en a si et seulement si $b \in D^k X(a)$ pour tout $k = 1, \dots, m$. Ainsi $D^1 X(a)$ est l'hyperplan tangent $\mathbf{T}_a X$, et $D^1 X(a) \cap D^2 X(a)$ est le cône quadrique de sommet a des droites rencontrant X avec multiplicité au moins 3 en a . On peut de cette manière déterminer pour une hypersurface intègre $X \subseteq \mathbf{P}^n$ de degré $d < n$ l'ensemble des droites contenues dans X passant par un point $x \in X$ général : c'est un fait que j'ai mentionné en (2.9) en relation avec la notion de VMRT.

(4.22) Théorème [8]. Soit $X \subseteq \mathbf{P}^n$ une hypersurface de degré d générale. Il existe une hypersurface $V(K)$ de degré

$$d[(d-1)^n - 1] - 3(n+1)(d-2) = (d-2) \left(d \cdot \frac{(d-1)^n - 1}{d-2} - 3(n+1) \right)$$

dont l'intersection avec X est le lieu des points de tangence des hyperplans bitangents à X .

On appelle *couple-nodal* le diviseur $X \cap V(K)$. On obtient en corollaire que le nombre d'hyperplans bitangents à X passant par $n-2$ points généraux de \mathbf{P}^n est

$$\frac{1}{2} d(d-1)^{n-2} (d-2) \left(d \cdot \frac{(d-1)^n - 1}{d-2} - 3(n+1) \right).$$

Pour $n=3$, on retrouve la formule de Salmon donnée en (4.3).

Preuve. Pour alléger un peu les notations et me raccrocher à la formule (4.21.2) je vais me limiter au cas $n=3$, qui est suffisant pour capturer l'essence de la preuve. Je note $S = X$. L'idée est

de considérer un pinceau de plans tangents contenant une droite tangente à S en un point p , et de regarder dans ce pinceau quels sont les plans tangents à S . Parmi ceux-ci on trouve le plan $\mathbf{T}_p S$, qui compte en général avec multiplicité 2 (nous allons d'ailleurs le démontrer); lorsque $\mathbf{T}_p S$ est un plan bitangent à S , cette multiplicité est plus grande, et c'est ainsi que nous allons détecter ces plans.

Soit donc $p' \in S$, $p'' \in \mathbf{T}_{p'} S$, et $p \in \mathbf{P}^3$. On note f l'équation définissant S .³³ La section de S par le plan $\langle p', p'', p \rangle$ est définie en coordonnées homogènes $(\alpha : \beta : \gamma)$ par l'équation

$$(4.22.1) \quad f(\alpha p' + \beta p'' + \gamma p) = 0,$$

et d'après la formule de Newton (4.21.2) on a

$$f(\alpha p' + \beta p'' + \gamma p) = T\alpha^{d-1}\gamma + \frac{1}{2}\alpha^{d-2}(A\beta^2 + 2B\beta\gamma + C\gamma^2) \pmod{(\beta, \gamma)^3},$$

où $T = D_p f(p')$, $A = D_{p''} f(p')$, $B = D_{p''} p' f(p')$, $C = D_{p^2} f(p')$. Comme fonctions de p , T et C sont respectivement les équations du plan $\mathbf{T}_{p'} S$ et de la quadrique polaire $D^2 S(p')$.

Le plan $\langle p', p'', p \rangle$ est tangent à S si et seulement si le discriminant de l'équation (4.22.1) est nul, et d'après (4.22.1) ce discriminant s'écrit

$$(4.22.2) \quad \text{Disc}(f(\alpha p' + \beta p'' + \gamma p)) = T^2(A(B^2 - AC)^2\varphi + T\psi).$$

Ceci prouve en premier lieu que le plan $\mathbf{T}_{p'} S$ compte avec multiplicité au moins deux parmi les plans tangents à S contenus dans le pinceau défini par la droite $\langle p', p'' \rangle$. Pour qu'il compte avec multiplicité strictement plus grande, il faut et il suffit que T divise l'un des trois facteurs A , $B^2 - AC$, ou φ .

Pour raisons de degré, $T|A$ si et seulement si $A = 0$, ce qui signifie que la droite $\langle p', p'' \rangle$ est l'une des deux tangentes principales à S en p' (c.-à-d. une composante du cône tangent en p' de $S \cap \mathbf{T}_{p'} S$). D'autre part la condition $T|B^2 - AC$ signifie que le cône tangent en p' de $S \cap \mathbf{T}_{p'} S$ est dégénéré, autrement dit p' est un point parabolique de S . Ces deux conditions sont étrangères à la question qui nous intéresse, et c'est la condition $T|\varphi$ qui caractérise le fait que le plan $\mathbf{T}_{p'} S$ soit tangent à S en un second point en plus de p' . Nous en déduisons l'existence du polynôme K et son degré par l'énoncé de théorie de l'élimination ci-dessous. (On peut d'ailleurs appliquer ce même résultat pour analyser la condition $T|B^2 - AC$: on obtient alors un polynôme H de degré $4(d-2)$ qui n'est autre que le déterminant hessien de f). \square

(4.23) Proposition. *Soit $W_{p', p''}(p)$ un polynôme tri-homogène de tri-degré (λ, μ, μ) relativement aux variables (p', p'', p) . On suppose que pour tout*

$$(p', p'') \in \tilde{\mathcal{C}}_S := \{(x', x'') : x' \in S \text{ and } x'' \in \mathbf{T}_{x'} S\} \subseteq \mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^3$$

l'hypersurface $V(W_{p', p''}) \subseteq \mathbf{P}^3$ est une somme de μ plans tous contenant la droite $\langle p', p'' \rangle$.

Pour tout $p' \in S$, il existe $p'' \in \mathbf{T}_{p'} S - \{p'\}$ tel que $\mathbf{T}_{p'} S$ est une composante de $V(W_{p', p''})$ si et seulement si la même condition vaut pour tout $p'' \in \mathbf{T}_{p'} S - \{p'\}$. L'ensemble des $p' \in S$ pour lesquels cette condition est vérifiée est découpé sur S par une hypersurface de degré $\lambda + \mu(\deg(S) - 2)$.

Notre seconde application énumérative est la suivante. En fait ce résultat n'est énoncé dans [8] que pour $n = 3$, mais j'ai réalisé en rédigeant le présent mémoire comment le généraliser en dimension arbitraire.

³³ Pour alléger le discours, je confonds un point $p \in \mathbf{P}^3$ et un vecteur $\hat{p} \in \mathbf{C}^4$ tel que $[\hat{p}] = p$. De la même façon je fais comme si l'équation définissant S était uniquement déterminée.

(4.24) Théorème [8]. Soit $X \subseteq \mathbf{P}^n$ une hypersurface de degré d générale, et soit $p_1, \dots, p_{n-2} \in \mathbf{P}^n$ généraux. Le lieu de tangence des $(n-2)$ -plans bitangents à X et passant par p_1, \dots, p_{n-2} est l'intersection complète de X , des $n-2$ polaires $D_{p_i}X$, $i = 1, \dots, n-2$, et d'une hypersurface de degré

$$d(d-1)^{n-2} - (3n-5)d + 6(n-2).$$

On obtient en corollaire que le nombre de $(n-2)$ -plans bitangents à X passant par $n-2$ points généraux de \mathbf{P}^n est

$$\frac{1}{2}d(d-1)^{n-2}[d(d-1)^{n-2} - (3n-5)d + 6(n-2)].$$

Lorsque $n = 3$, c'est le nombre de droites bitangentes à une surface $S \subseteq \mathbf{P}^3$ passant par un point général, qui est donc

$$\frac{1}{2}d(d-1)(d-2)(d-3).$$

La preuve du théorème (4.24) est similaire à celle de (4.22). On considère $p' \in S$ et $p'' \in \mathbf{T}_{p'}S$, et on écrit l'équation de la section $\langle p', p'' \rangle \cap S$ comme en (4.22.1). Elle possède un point de multiplicité 2 en p' , et il s'agit de caractériser les p' tels qu'il y a un autre point de multiplicité au moins 2. Ceci s'écrit en considérant un discriminant réduit pour l'équation de $\langle p', p'' \rangle \cap S$. Dans le cas $n = 3$ qui se trouve dans [Sa862], la forme définissant $\langle p', p'' \rangle \cap S$ a deux variables seulement et tout ceci peut se faire à la main en considérant un déterminant de Sylvester, sans invoquer la théorie du discriminant réduit.

Les situations considérées dans les théorèmes (4.22) et (4.24) ont ceci en commun que ce sont les deux cas où la famille paramétrant les k -plans de \mathbf{P}^n passant par q points fixés est de dimension 2. On peut cependant imaginer d'autres problèmes énumératifs que le discriminant réduit permet de résoudre simplement : par exemple, compter les droites dans \mathbf{P}^4 passant par un point et possédant deux points de tangence d'ordres 3 et 2 respectivement avec une hypersurface $V \subseteq \mathbf{P}^4$.

L'énumération des plans tri-tangents à une surface $S \subseteq \mathbf{P}^3$ (un problème de codimension 3) telle qu'elle est effectuée dans [Sa862], et reprise dans mes notes [TV.14], met en œuvre une stratégie différente, qu'il est également envisageable de pousser plus loin, voir section 5.5.

*Et pour essayer,
Voir si la route est longue,
Et si elle nous plaît.*

Noir Désir, *Tout l'or*

5 – Et ensuite ?

J'ai indiqué au cours des chapitres précédents les questions posées par les travaux de recherche que j'ai présentés, et tâché d'indiquer quels projets il me semble possible d'entreprendre. Il ne me semble pas utile d'y revenir ici. Dans ce chapitre je décris des projets que je prévois d'entreprendre, dans des directions nouvelles. La section 5.4 est une exception notable à ce caractère nouveau : je présente ce projet ici parce qu'il aurait pris une place démesurée dans la section 4.1.

5.1 – Principe de bidualité et singularités

Je voudrais étudier le principe suivant.

(5.1) Philosophie. *Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow B$ une famille de variétés, et soit $\Delta \subseteq B$ son discriminant : Δ est le lieu au dessus duquel les fibres de B sont singulières. Pour tout $t \in \Delta$, la singularité (Δ, t) détermine les singularités de la fibre $X_t = f^{-1}(t)$.*

On peut aussi imaginer diverses variantes de cette situation. D'autre part puisque j'énonce une "philosophie", je ne suis pas très regardant sur les hypothèses.

Il est entendu que cette philosophie ne s'applique pas en toute généralité. Par exemple, si \mathcal{X} est une surface et B une courbe lisse, les singularités (Δ, t) sont complètement caractérisées par la multiplicité de t dans Δ . Or une fibre X_t qui est une courbe cuspidale, et une autre $X_{t'}$ qui est une courbe 2-nodale, donnent toutes les deux un point de multiplicité deux dans le discriminant : on a donc une violation manifeste du principe énoncé ci-dessus.

(5.2) Fibrations elliptiques. Le phénomène précédent de violation de la philosophie se produit par exemple pour les surfaces elliptiques. Dans ce cas la formule du fibré canonique, initialement due à Kodaira puis vastement généralisée par Kawamata, Ambro, etc., nous indique qu'il faut aussi considérer la variation en modules des fibres. Il serait intéressant d'établir dans quelle mesure la prise en compte de la variation en modules permet de faire fonctionner la philosophie (5.1) pour les surfaces elliptiques. Ceci me semble une entreprise plausible, dans la mesure où les surfaces elliptiques sont complètement classifiées.

La situation suivante est pour moi le prototype de la philosophie (5.1), qui me fait reconnaître des comportements similaires dans d'autres situations.

(5.3) Duale d'une variété projective. Je prétends que la philosophie (5.1) s'applique de manière relativement convaincante pour la famille de toutes les sections hyperplanes d'une variété $X \subseteq \mathbf{P}^N$. Dans ce cas l'espace des paramètres B est l'espace projectif dual $\check{\mathbf{P}}^N$, et le discriminant Δ est la variété duale $X^\vee \subseteq \mathbf{P}^N$, définie comme l'adhérence du lieu des hyperplans tangents à X en un point lisse.

Un de mes théorèmes préférés dit que $(X^\vee)^\vee = X$ (en caractéristique 0, ou sous une certaine hypothèse de séparabilité en caractéristique arbitraire) ; c'est ce que j'appelle la bidualité. La correspondance est en fait beaucoup plus profonde, je donne ci-dessous quelques énoncés en ce sens, et c'est ce qui me fait dire que la philosophie (5.1) s'applique dans ce cadre.

(5.4) Théorème (bidualité).

(5.4.1) Soit $X \subseteq \mathbf{P}^N$ une variété. On a $(X^\vee)^\vee = X$. Plus précisément, pour p et ϖ points lisses de X et X^\vee respectivement, l'hyperplan $\varpi^\perp \subseteq \mathbf{P}^N$ est tangent à X en p si et seulement si l'hyperplan $p^\perp \subseteq \check{\mathbf{P}}^N$ est tangent à X^\vee en ϖ .

(5.4.2) Supposons que X est lisse et sa duale est une hypersurface. Alors un point $\varpi \in X^\vee$ est lisse si et seulement si l'hyperplan $\varpi^\perp \subseteq \mathbf{P}^N$ est tangent à X en un unique point p , et $\varpi^\perp \cap X$ a un point double ordinaire en p .

(5.4.3) Supposons que $X \subseteq \mathbf{P}^N$ est une hypersurface lisse, et soit $\varpi \in X^\vee$ tel que le lieu singulier de la section $\varpi^\perp \cap X$ consiste en un nombre fini de points p_1, \dots, p_r . Alors le cône tangent à X^\vee en ϖ est la somme des hyperplans $p_1^\perp, \dots, p_r^\perp$, chacun compté avec multiplicité $\mu(X, \varpi, p_i)$, le nombre de Milnor de la singularité de $\varpi^\perp \cap X$ en p_i .

Les énoncés (5.4.1) et (5.4.2) sont classiques. On démontre en fait que les variétés conormales de X et X^\vee coïncident, où la conormale \mathcal{C}_X de X est l'adhérence de

$$\mathcal{C}_X^\circ = \{(p, \varpi) \in \mathbf{P}^N \times \check{\mathbf{P}}^N : p \in X_{\text{lisse}}, \text{ et } \varpi^\perp \text{ tangent à } X \text{ en } p\}.$$

On trouve une preuve algébrique en [Hrs95, Example 16.20], et en [GKZ08, Chap. 1] une preuve différente, basée sur le fait que \mathcal{C}_X est lagrangienne pour la structure symplectique naturelle sur la variété cotangente $\Omega_{\mathbf{P}^N}^1$. L'énoncé (5.4.3) est dû à Dimca [Dim87, Prop. 11.24]. Je donne en (5.9) encore un autre énoncé, dû à Lê et Teissier. Avant de l'énoncer, voici quelques exemples significatifs.

(5.5) Surfaces dans \mathbf{P}^3 . Pour $S \subseteq \mathbf{P}^3$ une surface générale, ceci donne une réalisation de la philosophie (5.1). Les différentes strates singulières de la duale S^\vee sont :

en codimension 1 :

- une courbe double ordinaire K , correspondant aux sections hyperplanes 2-nodales de S , et à l'hypersurface couple-nodale du théorème (4.22) ;
- une courbe double cuspidale H , correspondant aux sections cuspidales de S ;

et en codimension 2 :

- les points triples de K , correspondant aux sections 3-nodales ; en un tel point, la surface S^\vee a trois feuilles locales ;
- les points “de type γ ”, correspondant aux sections avec un nœud et un cusp, qui sont des points lisses de H et cuspidaux de K ; en un tel point, la surface S^\vee a deux feuilles locales ;
- les points “de type β ”, correspondant aux sections tacnodales de S , qui sont des points lisses de K et cuspidaux de H ; en un tel point, la surface S^\vee a une seule feuille locale, et possède une singularité fameuse appelée *queue d'aronde* (*swallowtail* en anglais).

Bien entendu il existe des surfaces spéciales S pour lesquelles cette situation est perturbée ; il serait intéressant d'étudier dans quelle mesure la philosophie (5.1) continue à s'appliquer dans ces cas-là.

(5.6) Courbes planes. Dans le cas d'une courbe plane $C \subseteq \mathbf{P}^2$ (intègre, disons) il semble possible d'étudier en toute généralité la validité de la philosophie (5.1) en se servant du théorème de Puiseux.

(5.7) Discriminant universel. C'est le candidat canonique pour faire fonctionner la philosophie (5.1). Soit $f \in A_{\mathbf{Z}}[x_0, \dots, x_n]$ le polynôme homogène générique de degré d et

$$\mathfrak{D}_{\mathbf{Z}} = ((f, \partial_0 f, \dots, \partial_n f) : (x_0, \dots, x_n)^\infty) \cap A_{\mathbf{Z}}$$

comme en (4.18) ; l'idéal \mathfrak{D}_Z est engendré par le discriminant $\text{Disc}_d \in A_Z$, qui est un polynôme homogène de degré $(n+1)(d-1)^n$ en les coefficients de f .

Soit $B_d = \text{Proj}(A_Z)$, qui s'identifie au système linéaire $|\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d)|$, et $\Delta_d \subseteq B_d$ l'hypersurface définie par Disc_d . L'idéal $(f, \partial_0 f, \dots, \partial_n f)$ définit un schéma

$$\mathcal{D}_d \subseteq \mathbf{P}_{B_d}^n$$

qui est la famille universelle des lieux singuliers des hypersurfaces de degré d de \mathbf{P}^n .

Il existe un morphisme $\varphi : \mathcal{D}_d \rightarrow \Delta_d$ dont Busé et Jouanolou démontrent qu'il est birationnel en l'identifiant explicitement à un éclatement [BJ14, §4.7]. Ceci ouvre une voie pour démontrer la philosophie (5.1) dans cette situation : il suffit³⁴ de démontrer que l'idéal définissant l'éclatement de Δ_d définit le lieu singulier de Δ_d .

Il existe une histoire parfaitement analogue à ce qui précède en remplaçant le discriminant par le résultant, qu'il serait tout aussi intéressant d'examiner. On peut aussi imaginer différentes variantes, mettant en jeu par exemple le discriminant réduit introduit dans [8], voir la section 4.2.

Avant de passer au théorème de Lê–Teissier, je remarque que les situations dans lesquelles la philosophie (5.1) semble le mieux s'appliquer ont en commun d'avoir un aspect "universel".

(5.8) Préliminaires techniques. Pour $X \subseteq \mathbf{P}^N$ une variété et $\Lambda \subseteq \mathbf{P}^N$ sous-espace linéaire, on définit le *lieu de tangence* $\text{Tan}(X, \Lambda)$ de la manière suivante : on considère le diagramme conormal de X ,

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C}_X & \\ p \swarrow & & \searrow q \\ X & & X^\vee \end{array}$$

F_1, \dots, F_r les composantes irréductibles de $q^{-1}(\Lambda^\perp \cap X^\vee)$ dominant Λ^\perp , et on définit $\text{Tan}(X, \Lambda) = \bigcup p(F_i)$. C'est une notion qui peut réserver quelques surprises.

On définit d'autre part la *variété polaire* $P(X, \Lambda)$ comme étant $p(q^{-1}(\Lambda^\perp \cap X^\vee))$. Si Λ est général, c'est l'adhérence de l'ensemble des $p \in X$ tels que l'espace projectif tangent $\mathbf{T}_p X$ contient Λ . Si Λ est un point et X une hypersurface, c'est $D_p X \cap X$ dans le formalisme polaire introduit en (4.21).

(5.9) Théorème (Lê–Teissier, voir [GT18]). *Soit $Z \subseteq \mathbf{P}^N$ une variété, et soit $z \in Z$.*

i) Chaque composante irréductible de la duale du cône tangent à Z en z (ou plutôt du cône tangent réduit), $(\text{TC}_z Z)^\vee$, est contenue dans le lieu de tangence $\text{Tan}(Z^\vee, z^\perp)$.

ii) Soit T une composante irréductible de $\text{Tan}(Z^\vee, z^\perp)$. Il existe un entier $k \in \llbracket -1, N-2 \rrbracket$ tel que pour tout sous-espace linéaire $\Lambda \subseteq \mathbf{P}^N$ de dimension k , $z \in P(Z, \Lambda)$, et quand Λ varie les cônes tangents $\text{TC}_z(P(Z, \Lambda))$ ont une composante irréductible fixe qui est la duale de T .

Il est pertinent d'appliquer cet énoncé lorsque $Z = X^\vee$. Dans ce cas il nous dit qu'en général il ne suffit pas de considérer le cône tangent $\text{TC}_\varpi(X^\vee)$ pour comprendre $\text{Tan}(X, \varpi^\perp)$, et donc les singularités de la section hyperplane $X \cap \varpi^\perp$.

En général les composantes irréductibles de $(\text{TC}_z Z)^\vee$ ne constituent pas des composantes irréductibles de $\text{Tan}(Z^\vee, z^\perp)$, comme le montrera l'exemple suivant. En revanche on peut espérer les identifier comme composantes immergées d'une version schématique de $\text{Tan}(Z^\vee, z^\perp)$ encore à définir. Établir une version schématique du théorème de Lê–Teissier est l'un des grands objectifs de mon projet de recherche.

³⁴. au sens mathématique ; en français courant on dirait plutôt "il faut"

(5.10) Exemple. Soit $X = S(1, 2) \subseteq \mathbf{P}^4$ le scroll cubique rationnel normal, défini par le système linéaire des coniques passant par un point $x_0 \in \mathbf{P}^2$. Je note E la droite de X correspondant au diviseur exceptionnel au dessus de x_0 , et F les droites du réglage.

On considère $Z = X^\vee$, qui est une hypersurface cubique (par exemple parce que X est une projection de la surface de Veronese $v_2(\mathbf{P}^2)$, donc X^\vee est une section hyperplane de $(v_2(\mathbf{P}^2))^\vee$). Le lieu double de X^\vee est un plan Π , correspondant aux sections de X de la forme $E + F + F'$ avec F et F' deux droites distinctes. Dans ce plan Π , il y a une conique C_Π qui correspond aux sections de la forme $E + 2F$, en chaque point de laquelle le cône tangent de X^\vee est un \mathbf{P}^3 double.

Soit $\varpi \in Z = X^\vee$ un point sur C_Π , et notons $\varpi^\perp \cap X = E + 2F_\varpi$. La variété $(\mathrm{TC}_\varpi Z)^\vee$ est un point qui se trouve sur $\mathrm{Tan}(Z^\vee, \varpi^\perp) = \mathrm{Tan}(X, \varpi^\perp)$, lequel lieu de tangence est F_ϖ tout entier. Le point $(\mathrm{TC}_\varpi Z)^\vee$ est $E \cap F_\varpi$, qui est un point immergé du schéma $\mathrm{Sing}(\varpi^\perp \cap X)$.

(5.11) Dans l'exemple ci-dessus, la cubique X^\vee a déterminant hessien identiquement nul. Les variétés satisfaisant à cette propriété sont étudiées dans [GR15, GRS20] et devraient fournir d'autres exemples instructifs pour illustrer le théorème de Lê et Teissier.

(5.12) Le théorème de Lê–Teissier est démontré par déformation au cône tangent, en prenant des limites de variétés conormales. Le principe est que la limite d'une variété conormale dans une dégénérescence est une variété conormale accompagnée d'autres composantes. C'est exactement le genre de phénomène que j'ai étudié en détail avec Ciro Ciliberto dans [2], puis dans les travaux en cours présentés plus loin dans ce chapitre, section 5.4. Il vaut la peine je pense d'explorer ces liens plus en profondeur.

(5.13) J'envisage dans un premier temps d'étudier une grande variété d'exemples pour illustrer le théorème de Lê–Teissier ci-dessus. Je pense par exemple considérer les scrolls, les variétés quasi-homogènes, sphériques, etc.

D'une certaine manière les variétés de Severi d'une surface $S \subseteq \mathbf{P}^N$ qui ne se comportent pas bien sagement (pour faire simple, dès qu'elles n'ont pas la dimension attendue par exemple) violent le principe (5.1). Pourtant le théorème de Lê–Teissier doit être vrai aux points correspondants de la variété duale $S^\vee \subseteq \check{\mathbf{P}}^N$. On devrait donc obtenir de cette manière des exemples intéressants. Cette idée est le lien qui unit les programmes présentés ici et dans la section suivante 5.2.

Plus généralement on pourra considérer au même effet les variétés inattendues du point de vue de l'interpolation, voir par exemple [CHMN18, HMNT21]. Ces travaux présentent d'ailleurs un aspect “calcul effectif” qui devrait bien se prêter aux expérimentations.

D'autre part il faudra nécessairement mettre en place des outils permettant de définir la duale et les polaires en termes schématiques. Je compte m'inspirer des travaux de Kleiman et Piene pour réaliser cette étape. Avec Laurent Busé nous continuons à explorer les discriminants réduits introduits dans [8], et les résultats que nous avons obtenus jusqu'ici me rendent optimiste quant à la possibilité de les utiliser dans le cadre du problème décrit ici.

5.2 – Surfaces faiblement défectives et variétés de Severi

Soit $X \subseteq \mathbf{P}^N$ une variété non dégénérée de dimension n . Pour tout entier $k \geq 0$, on dit que X est k -défective si la variété $S^k(X)$ des k -plans sécants à X a dimension strictement inférieure à la dimension attendue $\min(N, n(k+1) + k)$. Si X est k -défective, il résulte du lemme de Terracini qu'un hyperplan $(k+1)$ -tangent à X général a un lieu de contact avec X de dimension strictement positive. Ceci a conduit Chiantini et Ciliberto à introduire la définition suivante.

(5.14) Définition [CC02]. *On dit que X est k -faiblement déficiente si un hyperplan $(k + 1)$ -tangent à X général a un lieu de contact avec X de dimension strictement positive.*

Cette propriété m'intéresse du point de vue de la dualité projective : si X est k -faiblement déficiente, alors le lieu des points de multiplicité k de sa duale X^\vee va avoir tendance à être plus petit qu'attendu, c.-à-d. avoir codimension $> k$ dans X^\vee .

Pour fixer les idées, voyons ce qui se passe pour la surface de Veronese $X = v_2(\mathbf{P}^2) \subseteq \mathbf{P}^5$. Elle est notoirement 1-défective, et effectivement tout hyperplan 2-tangent à X découpe une conique double. Sa duale est une hypersurface cubique, dont le lieu singulier est une surface de Veronese, qui a codimension 2 et non pas 1. Bien entendu cet exemple fait penser à (5.10) de la section précédente.

Chiantini et Ciliberto donnent la classification des surfaces k -faiblement déficientes pour k arbitraire. Je pense qu'il sera instructif de reprendre cette classification en ayant en tête les problèmes mentionnés précédemment à propos de la dualité projective.

L'énoncé suivant est très utile pour l'étude des variétés de Severi. Il fournit le point de départ des résultats d'irréductibilité de [6] présentés en 1.3. Grâce à la classification mentionnée ci-dessus, il permet aussi de généraliser une partie des résultats d'Arbarello et Cornalba dans [AC81a], qui ont été utilisés pour obtenir les résultats sur les courbes Prym décrits en 3.3.

(5.15) Théorème [CC02]. *Soit $X \subseteq \mathbf{P}^N$ une variété non dégénérée de dimension n , et $k \geq 0$ un entier. Pour tout hyperplan $\varpi \in \check{\mathbf{P}}^N$ général parmi les hyperplans $k + 1$ -tangents à X , un point général de n'importe quelle composante irréductible du lieu de contact de ϖ et X est un point double pour $\varpi^\perp \cap X$.*

Si $(n + 1)(k + 1) \leq N$ et X n'est pas k -faiblement déficiente, alors pour $p_0, p_1, \dots, p_k \in X$ généraux un membre général du système linéaire des sections hyperplanes de X ayant un point singulier en chacun des p_i est singulier seulement en p_0, \dots, p_k , où il possède des points doubles ordinaires.

Regardons l'exemple suivant, indiqué dans [AC81a] et apparaissant bien sûr dans la liste de [CC02].

(5.16) Exemple. Pour 9 points généraux $p_1, \dots, p_9 \in \mathbf{P}^2$, il existe une unique sextique singulière en chacun des p_i , qui est une cubique double $2C_0$ [AC81a, Thm. 3.2]. Ainsi la surface $v_6(\mathbf{P}^2) \subseteq \mathbf{P}^{27}$ est 8-faiblement déficiente.

D'autre part la variété de Severi $V^{6,9}$ des sextiques planes 9-nodales irréductibles est irréductible et de dimension " $3d + g - 1$ " = 18. Ceci suggère le problème suivant.

(5.17) Problème. *Pour tout entier $d \geq 1$ et $\delta \leq \frac{1}{2}(d - 1)(d - 2)$, décrire la position des nœuds d'un membre général de la variété de Severi $V^{d,\delta}$ des courbes planes de degré d irréductibles et δ -nodales.*

Posé en toute généralité ce problème est très difficile, et pose des questions profondes sur les modules des courbes de genre g et la théorie de Brill–Noether.

On sait par un théorème de Harris et Mumford que l'espace de modules \mathcal{M}_g est de type général pour $g \geq 24$, et donc *a fortiori* il n'est pas uniréglé. Ainsi, pour une variété de Severi $V^{d,\delta}$ paramétrant des courbes de genre $g \geq 24$ à modules généraux, si on note $D \subseteq (\mathbf{P}^2)^{[\delta]}$ le lieu des nœuds des membres de $V^{d,\delta}$, il est impossible que $V^{d,\delta}$ soit birationnelle à un fibré projectif au-dessus de D . C'est donc que pour $(p_1 + \dots + p_\delta) \in D$ général, le système linéaire des courbes de degré d singulières en chacun des p_i doit avoir dimension 0.

Revenons un moment à l'exemple (5.16) pour voir ce qu'on peut espérer dire sur le problème (5.17) dans certains cas particuliers.

Tout d'abord, il est facile de donner une condition nécessaire sur les p_i pour qu'il existe une sextique possédant un point double ordinaire en chaque p_i : il faut que le diviseur $2(p_1 + \dots + p_9)$ sur la cubique C_0 soit linéairement équivalent à $6H$ où H est la classe découpée par les droites sur C_0 . Cependant il ne me paraît pas du tout clair que cette condition soit suffisante. D'ailleurs, je remarque au passage que nous sommes typiquement dans une situation où le théorème (1.11) ne s'applique pas.

Je me demande s'il est possible de caractériser l'ensemble Z des nœuds d'une sextique nodale de genre 1 en termes de la résolution de l'idéal projectif de $Z \subseteq \mathbf{P}^2$. Un tel Z est contenu dans une unique cubique, puisque les cubiques passant par Z forment le système linéaire adjoint et nos sextiques 6-nodales ont genre 1. Ceci permet de démontrer (en utilisant les techniques présentées dans [Eis05, Chap. 3]) que l'idéal de Z est donné par une matrice de Hilbert–Burch de type

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(où les entiers indiquent le degré des coefficients de la matrice), qui est en fait le même type que celui correspondant à neuf points généraux.

Pour distinguer Z d'un ensemble Z_{gen} de neuf points généraux il faut considérer la puissance symbolique $I_Z^{(2)}$ (voir ci-dessous), et sa résolution. Celle-ci doit nécessairement différer de celle de $I_{Z_{\text{gen}}}^{(2)}$, puisque ces résolutions déterminent le nombre de sextiques contenant doublement Z et Z_{gen} respectivement.

(5.18) Puissances symboliques et problème du confinement.³⁵ Dans le cadre introduit plus haut, pour tout entier $k \geq 1$ la k -ème puissance symbolique $I_Z^{(k)}$ est l'idéal des polynômes définissant une hypersurface contenant Z avec multiplicité au moins k , tandis que I_Z^k est simplement la puissance k -ème de l'idéal I_Z .

En général on a une inclusion stricte $I_Z^k \subset I_Z^{(k)}$. Par exemple, pour $I_Z = (xy, xz, yz)$ l'idéal définissant les trois points $(0 : 0 : 1), (0 : 1 : 0), (1 : 0 : 0)$, le polynôme xyz appartient à $I_Z^{(2)}$ mais pas à I_Z^2 .

Le problème du confinement consiste à déterminer les valeurs de r et m pour lesquelles il est vrai que $I_Z^{(r)} \subset I_Z^m$.

Pour terminer avec mon exemple, il me semble possible d'expérimenter pour chercher comment $I_Z^{(2)}$ et $I_{Z_{\text{gen}}}^{(2)}$ diffèrent, et donc comment I_Z et $I_{Z_{\text{gen}}}$ diffèrent. Pour cela il faudra commencer par trouver un Z explicite qui convient (c.-à-d. pour lequel il existe une sextique irréductible avec des nœuds en Z), ce à quoi on peut s'attaquer de différentes manières. Ensuite on pourra calculer $I_Z^{(2)}$ en saturant l'idéal I_Z^2 . En effectuant les mêmes calculs pour $I_{Z_{\text{gen}}}^{(2)}$ on devrait finalement pouvoir y voir un peu plus clair.

(5.19) Équation du membre général de $V^{d,\delta}$. Une fois déterminée l'allure de l'idéal I_Z définissant les nœuds d'une courbe C irréductible de degré d et δ -nodale générale, il semble naturel de se demander quelle forme particulière revêt l'équation de C .

Dans le cas où le système linéaire g_d^2 sur la normalisation de C définissant le modèle $C \subseteq \mathbf{P}^2$ est complet, une description déterminantielle de l'idéal de C est donnée dans l'article [AS79]

35. *containment problem* en anglais.

d'Arbarello et Sernesi, dépendant de certains invariants introduits par Petri. Il me semble relativement praticable d'étendre ce résultat au cas d'un système g_d^2 incomplet (auquel appartient l'exemple des sextiques 9-nodales).

5.3 – Quelques problèmes liés à l'extensibilité

J'énonce ici quelques problèmes qui se posent naturellement en relation avec les questions d'extensibilité considérées dans le chapitre 3. De manière frappante ils mettent souvent en jeu des questions liées à la dualité projective.

(5.20) En guise d'introduction, je note que Zak évoque dans [Zak91] la possibilité de démontrer grâce à la dualité projective le théorème (3.3) qu'a ensuite démontré Lвовski par une autre voie. L'idée est que si $X \subseteq \mathbf{P}^N$ est une section hyperplane de $Y \subseteq \mathbf{P}^{N+1}$, alors la duale X^\vee est la projection d'une polaire de Y . La borne donnée en (3.3) pour l'extensibilité de X devrait dès lors venir du fait, valable si X est lisse, que la conormale \mathcal{C}_X s'identifie au fibré projectif $\mathbf{P}(N_X^\vee(1))$, et que le morphisme $\mathcal{C}_X \rightarrow \check{\mathbf{P}}^N$ est donné par un sous-système linéaire de $|\mathcal{O}_{\mathbf{P}(N_X^\vee(1))}(1)|$. Cette idée de preuve pose cependant un certain nombre de difficultés techniques qu'il serait intéressant de réussir à mettre au point.

(5.21) Variation en modules de sections linéaires. On a vu tout au long du chapitre 3 les liens entre la dimension des fibres de certaines applications modulaires d'oubli et l'extensibilité. Préciser ces liens dans une direction est le contenu des problèmes suivants.

(5.21.1) Problème. *Soit $Y \subseteq \mathbf{P}^N$ une variété. Déterminer des conditions pour que les sections de Y par des sous-espaces linéaires de dimension n de \mathbf{P}^N aient variation maximale en modules.*

(5.21.2) Variante. *Soit Z une section de Y par un sous-espaces linéaires de dimension $n - k$ de \mathbf{P}^N . Déterminer des conditions pour que les sections de Y par des sous-espaces linéaires de dimension n de \mathbf{P}^N contenant $\langle Z \rangle$ aient variation maximale en modules.*

J'ai déjà donné dans ce texte des résultats dans cette direction, d'une part le lemme (3.15) de Beauville et Mukai, et la proposition (3.44) corollaire d'un théorème de Pardini, et d'autre part le théorème (3.19) qui dit que les sections hyperplanes d'une surface $K3$ varient maximale en modules. Il me semble d'ailleurs possible de démontrer un résultat analogue pour les sections des surfaces d'Enriques en utilisant les mêmes méthodes : l'unicité de l'intégrale d'un ruban sur une courbe Prym canonique vaut, malgré les problèmes d'obstruction de ces rubans par ailleurs, et on dispose des résultats d'Anelli [Ane21] analogues à ceux d'Epema [Epe84] pour les types de vraies-fausses surfaces d'Enriques.

Dans la prépublication [Z.3], avec Laurent Manivel nous étudions ces questions pour les sections linéaires des variétés de Mukai, en utilisant la théorie des représentations.

Ces problèmes sont liés à la question des *variétés à sections hyperplanes isomorphes*, comme l'a déjà illustré la preuve de la proposition (3.44). Outre [Prd94] déjà cité, des résultats dans cette direction se trouvent aussi dans [Bea90] et [McK93]. Dans le récent [Chy], une réponse au Problème (5.21.1) est apportée dans le cas où $Y \subseteq \mathbf{P}^N$ est une hypersurface lisse.

L'article [Prd94] fait clairement apparaître les liens entre cette question et les propriétés de la duale $Y^\vee \subseteq \check{\mathbf{P}}^N$. Cet aspect des choses est également évoqué dans [Zak91], qui ne donne pas beaucoup plus de précisions.

(5.22) Énumération des variétés extensibles. Prenons l'exemple des courbes canoniques pour fixer les idées. À genre g fixé, les lieux des courbes C dont l'application de Gauss–Wahl Φ_C a corang k définissent des sous-variétés de l'espace des modules \mathcal{M}_g . Je propose de les étudier

du point de vue de la géométrie énumérative. Par exemple un objectif ambitieux pourrait être de chercher à déterminer les classes de ces sous-variétés dans l'anneau de Chow de \mathcal{M}_g . Je ne sais pour l'instant à peu près rien sur cette question. Déjà déterminer la dimension de ces sous-variétés est sans doute une question consistante.

Le cas le plus intéressant est sans doute celui du diviseur de \mathcal{M}_{10} paramétrant les courbes canoniques extensibles, dont la classe a été calculée par Farkas et Popa [FP05], obtenant ainsi un contre-exemple à la conjecture de la pente de Harris et Morrison.

5.4 – Énumération de courbes sur les surfaces $K3$

Ce projet se situe dans la continuité des résultats et conjectures de [2] présentés en section 4.1. Nous avons commencé Ciro Ciliberto et moi à considérer des dégénérescences de surfaces $K3$ en réunions de plans avec deux objectifs en tête :

- (i) énumérer les courbes intègres de genre donné dans un système linéaire sur une surface $K3$;
- (ii) explorer notre conjecture (4.14).

(5.23) Si (S, L) est une surface $K3$ polarisée de genre p primitive très générale, alors le nombre de courbes membres de $|L|$ de genre g et passant par g points généraux de S est donné par la formule de Yau–Zaslow, prouvée par Beauville et Bryan–Leung [Bea99, BL00], en termes des coefficients d'une forme quasi-modulaire. En revanche l'énumération des courbes membres de $|kL|$, $k > 1$, présente de sérieuses difficultés à cause de phénomènes tels que celui décrit en (5.24) ci-dessous. Cette énumération est connue seulement pour les courbes rationnelles [KMPS10], et met en œuvre des corrections inspirées par la formule d'Aspinwall–Morrison pour tenir compte des problèmes posés par les courbes rationnelles multiples. Je présente tous ces résultats dans [TV.11].

Nous proposons d'énumérer les courbes de genre arbitraire dans les systèmes $|kL|$ en appliquant la méthode de [2], en considérant des dégénérescences de S plongée par le système $|kL|$ en réunions de plans. De telles dégénérescences ont été construites dans [CMT01], voir la figure 5.1, et ont été baptisées *dégénérescences en oreillers* pour des raisons graphiques. Les figures de droite et de gauche doivent être recollées en identifiant les sommets (resp. les arêtes) portant le même numéro ; chaque petit triangle représente un plan. Pour aider à se représenter la figure, j'ai donné une version du tétraèdre (4 sommets, 6 arêtes) sous forme d'oreiller (figure 5.2).

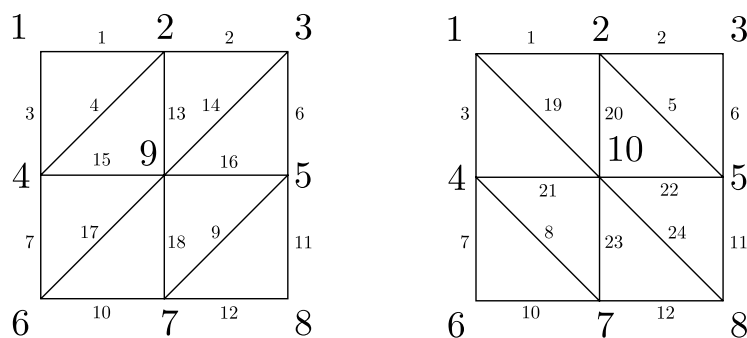


Figure 5.1: Dégénérescence en oreiller de $(S, 2L)$, $L^2 = 4$

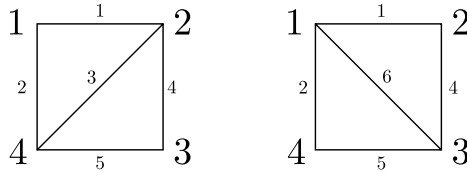


Figure 5.2: Le tétraèdre présenté sous forme d'oreiller

(5.24) Exemple. Imaginons qu'on veuille compter les courbes de genre 2 membres de $|kL|$ passant par $x_1, x_2 \in S$, où (S, L) est une surface $K3$ de genre 3. L'invariant de Gromov–Witten “comptant ces courbes” est défini sur l'espace de modules des applications stables correspondant, de dimension attendue 0 (une fois fixé le passage par x_1, x_2). Je donne ici un exemple de composante de dimension strictement positive de cet espace de modules qui contribue à l'invariant de Gromov–Witten qui nous intéresse. Ceci illustre le fait que cet invariant ne compte pas les courbes de genre 2 entières passant par x_1 et x_2 .

Soit $C \in |L|$ une courbe de genre 2 passant par x_1 et x_2 , et $R \in |L|$ une courbe rationnelle. Choisissons un point $x_R \in R \cap C$, intersection qu'on peut supposer simple. On considère la courbe $\bar{C} \cup_{x_R} \mathbf{P}^1$ intersection transverse de la normalisation \bar{C} de C avec un \mathbf{P}^1 au point pré-image de x_R dans \bar{C} . En considérant des revêtements $(k-1)$ -uples $\mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$, on obtient une famille de dimension positive d'applications stables $f : \bar{C} \cup_{x_R} \mathbf{P}^1 \rightarrow S$ ayant toutes la même image $C + (k-1)R \in |kL|$. La contribution de cette composante superabondante à l'invariant de Gromov–Witten peut être calculée en utilisant la formule d'Aspinwall–Morrison, démontrée par Claire Voisin, voir [TV.11] et ses références.

Un autre type de gag peut se produire. Supposons que R possède un nœud, et soit $a', a'' \in \mathbf{P}^1$ ses antécédents dans la normalisation. On considère $\mathbf{P}^1 \cup_{a', a''} \mathbf{P}^1$ la chaîne de deux \mathbf{P}^1 , obtenue en identifiant a' de la première copie avec a'' de la seconde. On a alors une application stable $\mathbf{P}^1 \cup_{a', a''} \mathbf{P}^1 \rightarrow S$ d'image $2R$, qui donne ensuite $\mathbf{P}^1 \cup_{a', a''} \mathbf{P}^1 \cup_{x_R} \bar{C} \rightarrow S$ d'image $2R + C \in |3L|$. Cette application stable est rigide : elle ne se déforme pas de manière superabondante et contribue honnêtement pour 1 à l'invariant de Gromov–Witten. Cependant le nombre d'applications stables de cette sorte qu'on peut construire dépend des singularités de R . Si $R \in |L|$ et (S, L) est très générale, la situation est sous contrôle puisque alors toutes les courbes rationnelles sont nodales par [Chx02]. Mais pour les courbes rationnelles dans les multiples de $|kL|$, c'est un résultat qui n'est pas connu.

Enfin on peut mettre ensemble les deux phénomènes décrits ci-dessus pour obtenir des situations comme dans la figure ci-dessous. On peut imaginer que chaque composante de ce type contribue de façon contrôlée par une version adaptée de la formule d'Aspinwall–Morrison, qu'il serait d'ailleurs intéressant d'étudier.

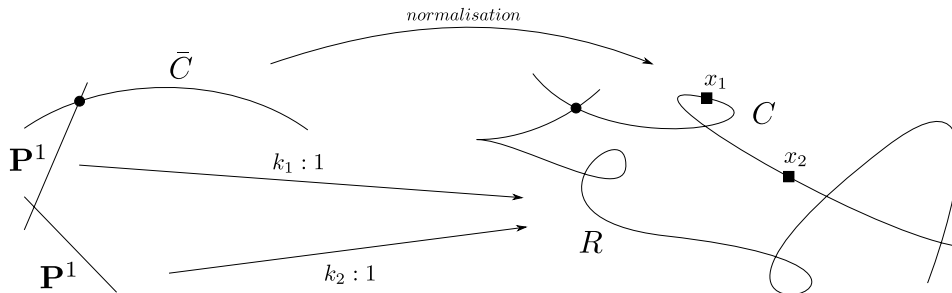


Figure 5.3: Exemple de composante superabondante d'applications stables

(5.25) Pour l’instant nous nous sommes concentrés sur deux cas tests qui sont encore des surfaces $K3$ dégénérées primitives : l’octaèdre dans \mathbf{P}^5 , et la “bi-pyramide à base triangulaire” dans \mathbf{P}^4 (deux tétraèdres recollés le long d’une face ; il y a donc 6 faces, 2 sommets triples, et 3 sommets quadruples). Dans ces deux cas, nous avons décrit complètement les variétés de Severi limites sous la forme prédite par notre conjecture (4.14) pour les courbes de genre $g > 0$, mais il nous reste encore quelques dizaines de courbes rationnelles à trouver. Les degrés des variétés de Severi dans ces deux cas sont indiquées dans le tableau ci-dessous.

$\delta =$	1	2	3	4	5
$p = 4$	42	672	5460	25650	
$p = 5$	48	900	8728	49440	176256

Cette étude a été l’occasion de perfectionner nos méthodes, et de mettre au jour des comportements sans doute plus proches de ce qui se passe en général que ce que nous avons observé avec le tétraèdre dans le travail [2]. J’en propose un assortiment à la fin de cette section, mais avant il faut expliquer nos conventions graphiques.

*“Venimmo al piè d’un nobile castello,
sette volte cerchiato d’alte mura.”*

Dante, *Inferno* IV 107-108

(5.26) **Conquête des enceintes successives.** Nous avons introduit une méthode graphique pour déterminer pratiquement sans calcul la restriction aux composantes irréductibles de la fibre centrale d’un twist $\mathcal{L}(-A)$. (Le contexte ici est celui introduit à la section 4.1 ; la notion de twist est introduite en (4.7)).

Je vais tâcher de l’expliquer en deux mots sur un exemple. Dans le contexte du modèle construit en (4.11) pour le tétraèdre, le twist correspondant à la face P_i du tétraèdre décrit en (4.9) est $\mathcal{L}(-M_i)$, où

$$M_i := 6P_i + \sum_{j \neq i} (5W'_{ij} + 4W''_{ij} + 3W_{ij} + 2W''_{ji} + W'_{ji}) + \sum_{k \neq i} \left(2T^k + 4A_i^k + \sum_{j \notin \{i,k\}} (3V_{ij}^k + 2V_{ji}^k + A_j^k) + \sum_{\{j < j\} \cap \{i,k\} = \emptyset} (V_{jj}^k + V_{jj}^k) \right).$$

On écrit M_i comme somme de six diviseurs effectifs réduits $\sum_{k=1}^6 M_{i,k}$, où $M_{i,1} = (M_i)_{\text{red}}$ puis $M_{i,k} = (M_i - \sum_{k' < k} M_{i,k'})_{\text{red}}$ pour $k > 1$. On colorie chacun de ces diviseurs d’une couleur différente sur le dessin. On constate que les $M_{i,k}$ sont simplement connexes centrés sur la face P_i et concentriques ; ils nous ont fait penser aux murailles concentriques d’un château fort. Sur la figure 5.6 les couleurs sont superposées : on a d’abord peint $M_{i,1}$ en jaune (toutes les composantes coloriées ont une première couche de jaune), puis $M_{i,2}$ en vert clair (toutes les composantes coloriées en autre chose que du jaune ont une couche de vert clair), etc.

En pratique, on part du dessin du tétraèdre sur lequel sont représentées les courbes de départ, c.-à-d. celles données par la restriction de \mathcal{L} à la fibre centrale ; dans notre cas elles proviennent des sections hyperplanes du tétraèdre, voir figure 5.5. On applique les couleurs de $M_{i,1}$, et on représente les courbes données par $\mathcal{L}(-M_{i,1})$; avec un peu d’entraînement cela se fait sans calcul (sur le dessin sont données les auto-intersections de toutes les courbes dans chacune des composantes de la fibre centrale ; il peut être judicieux de profiter de zoomer avec la version électronique pour réussir à les lire). Ensuite on recommence jusqu’à arriver au twist voulu.

(5.27) Note sur le *design*. Nous avons dessiné une représentation du modèle (4.11) du tétraèdre plus lisible que celle utilisée dans le travail [2] et donnée en figure 4.1. Les courbes sur la fibre centrale sont représentées en pointillés de manière tropicale.

La représentation tropicale d'une courbe dans une surface torique présente ceci d'agréable qu'on peut respecter les nombres d'intersection tout en restant dans une représentation réelle. En outre, on peut lire le genre des courbes comme le premier nombre de Betti du graphe de dimension 1 réelle qu'on a sous les yeux.

Les composantes irréductibles de la fibre centrale sont des surfaces toriques, dont l'intersection avec le reste de la fibre centrale est un diviseur anti-canonique invariant sous l'action du tore.³⁶ Il est important de visualiser l'intersection de nos courbes avec ces bords toriques, ce que la représentation tropicale permet de faire commodément.

Dans la figure ci-dessous je montre des courbes de \mathbf{P}^2 représentées sous forme tropicale. Le triangle représente le diviseur anticanonique $xyz = 0$ dans les coordonnées homogènes $(x : y : z)$.

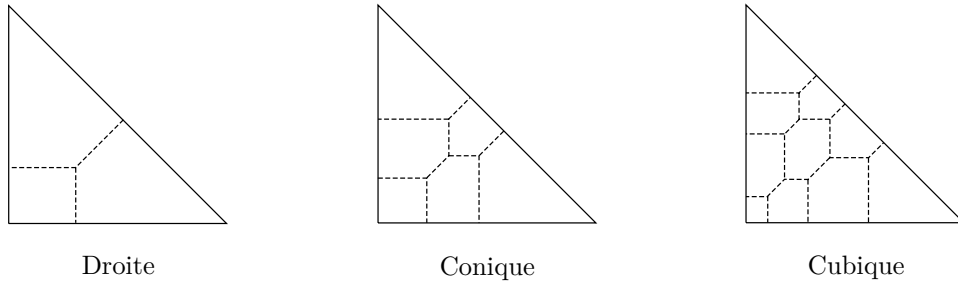


Figure 5.4: Représentation tropicale de courbes dans \mathbf{P}^2

(5.28) Morceaux choisis sur l'octaèdre. L'octaèdre est l'intersection complète $xy = zw = uv = 0$ dans \mathbf{P}^5 muni des coordonnées homogènes $(x : y : z : w : u : v)$. On considère une dégénérescence de surfaces $K3$ de genre 5 dans \mathbf{P}^5 vers l'octaèdre à la manière de (4.4), définie par les trois équations

$$xy - tq_1 = zw - tq_2 = uv - tq_3 = 0$$

dans $\mathbf{P}^5 \times \mathbf{D}$, où q_1, q_2, q_3 sont trois formes quadratiques en x, y, z, w, u, v , et t la coordonnée sur le disque \mathbf{D} . La fibre centrale possède des points quadruples qui sont localement des cônes sur un cycle de quatre droites dans \mathbf{P}^3 qu'il faut savoir traiter pour considérer les dégénérescences en oreiller. Ces points quadruples de la fibre centrale sont des points singuliers de l'espace total, ce qui est un peu exceptionnel : les sommets du tétraèdre sont lisses pour l'espace total, et c'est le comportement le plus fréquent, voir [CCFM07].

Ceci fait que le modèle permettant de comprendre les variétés de Severi limites des courbes de genre $g > 0$ est plus simple à construire que dans le cas du tétraèdre. Il suffit de faire le changement de base $t \mapsto t^2$ puis de résoudre les singularités. Le résultat est donné figure 5.7. On pourra constater émerveillé que la représentation tropicale des sections hyperplanes de l'octaèdre fait apparaître un cube. Les points quadruples de la fibre centrale sont remplacés par des surfaces de Del Pezzo de degré 4 possédant 4 points doubles ordinaires ; elles contiennent exactement 4 droites, qui forment un quadrilatère sur ses points singuliers. Je les note $V_1, \dots, V_4, V_N, V_S$ (N et S pour Nord et Sud). Les faces sont notées P_1, \dots, P_8 .

Le personnage qui fait sont entrée seulement pour les variétés de Severi limites des courbes rationnelles est l'hyperplan contenant quatre faces ayant un sommet en commun (cet hyperplan

³⁶ si on fait abstraction des points singuliers de l'espace total initial, voir (4.5) ; graphiquement ça ne pose pas de problème.

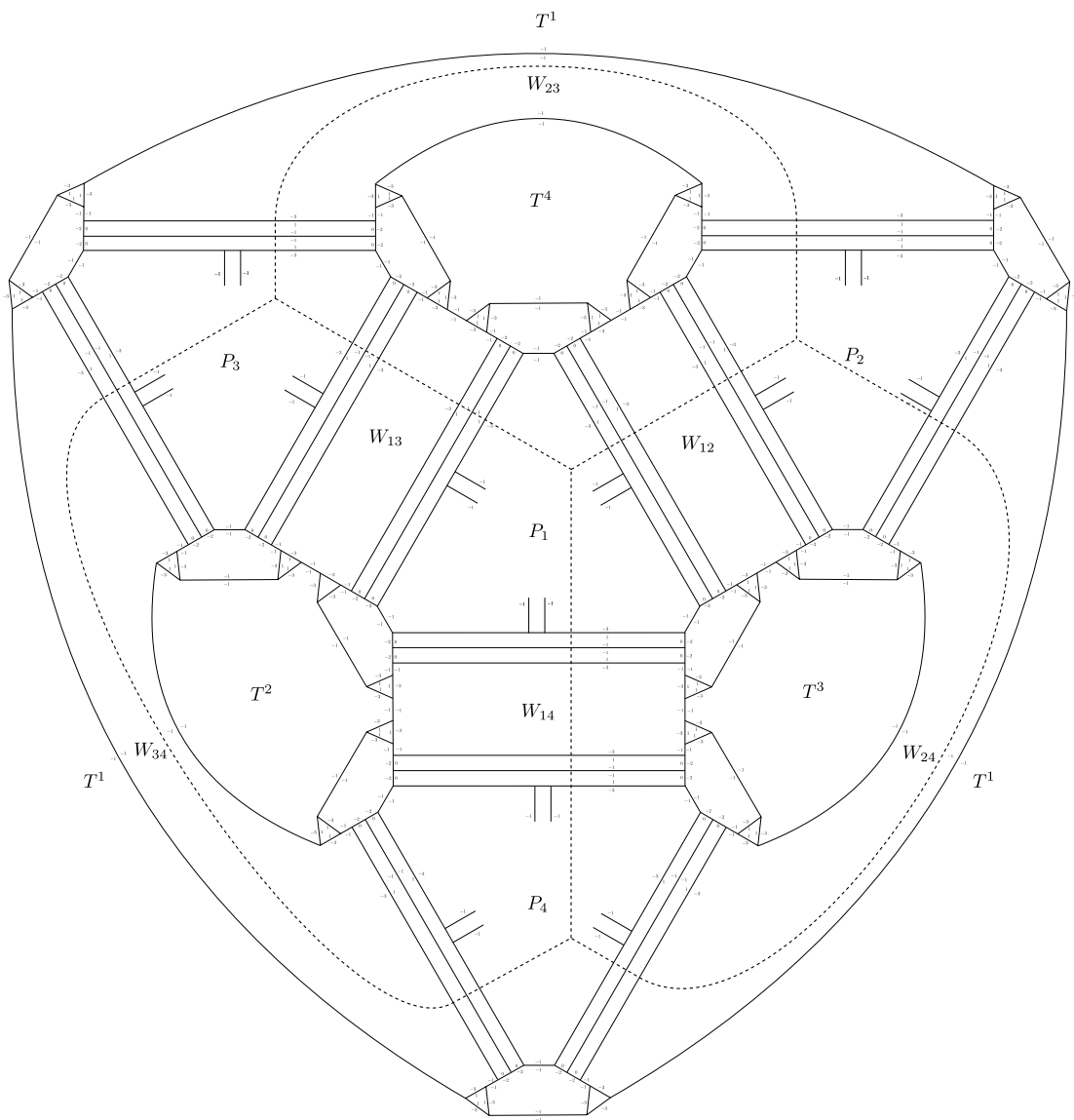


Figure 5.5: Modèle *art déco* pour la dégénérescence en un tétraèdre

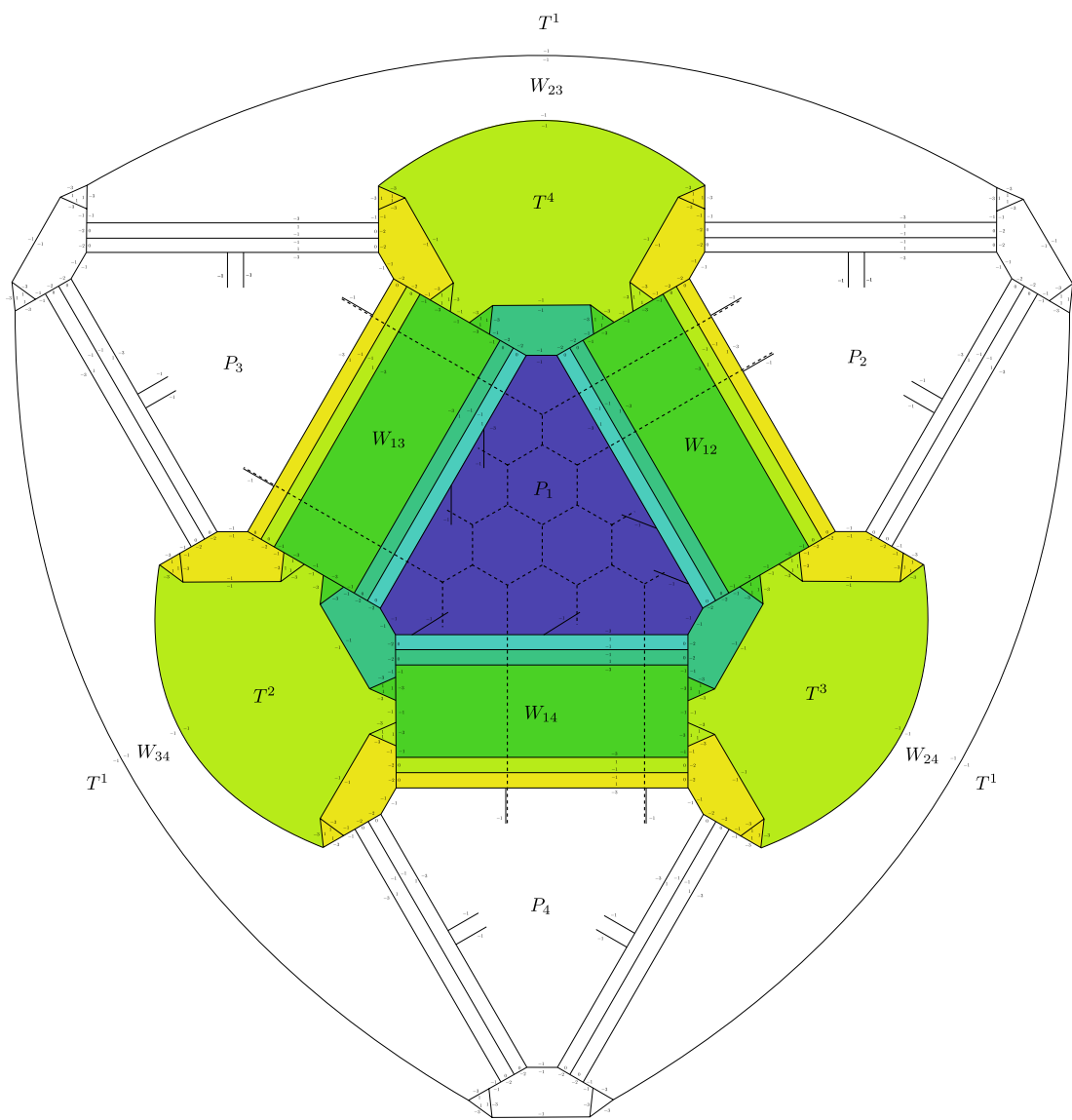


Figure 5.6: Enceintes successives pour une face du tétraèdre

n'apparaît pas pour les courbes de genre $g > 0$ car dans ce cas il ne passe pas par les points prescrits x_1, \dots, x_g). Le twist correspondant est dessiné figure 5.8, et donne comme modèle dans \mathbf{P}^5 une union de quatre surfaces quadriques passant toutes par deux points : l'un correspond au sommet commun aux quatre faces de départ, et l'autre à la contraction des quatre autres faces ; appelons les respectivement N et S . Ce modèle donne des courbes rationnelles qui contribuent à la variété de Severi limite.

La nouveauté par rapport au cas du tétraèdre est qu'il y a d'autres twists emboîtés dans celui-ci qui contribuent eux aussi à la variété de Severi limite. Dans le modèle des quatre quadriques, les hyperplans passant par le sommet N vont donner lieu à un autre twist, dans lequel vont apparaître des courbes rationnelles à prendre en compte. Cette situation est représentée figure 5.9. En fait on peut encore soustraire quelque chose à ce dernier twist, c'est ce qu'on fait sur la figure 5.10. Ceci correspond, dans le modèle des quatre quadriques, à l'unique hyperplan passant par N et tangent en ce point à chacune des quatre quadriques.

Pour les courbes rationnelles, il est en fait nécessaire de considérer un modèle plus compliqué que celui considéré jusqu'ici. En effet, nous avons identifié des situations recelant des courbes rationnelles qui ne sont visibles qu'après un nouveau changement de base. Pour donner une idée, je montre figure 5.11 l'allure autour de N (ou de V_N) d'un modèle permettant de voir la contribution des hyperplans tangents à une conique intersection de deux quadriques au point N .

Pour l'instant il nous reste encore des courbes rationnelles à trouver. Ainsi, le bon modèle pour l'octaèdre relativement à notre conjecture (4.14) n'est pas encore définitivement identifié.

Avant de passer à la suite, je mentionne que j'ai le projet d'apprendre la théorie de [ACGS20], qui met en œuvre la log-géométrie de Saito. J'ai eu le plaisir d'effectuer un séjour en visite à Dan Abramovich et Qile Chen, et nous avons tous les trois pu constater que faire fonctionner leur théorie explicitement sur des exemples comme ceux que j'ai présentés est loin d'être immédiat.

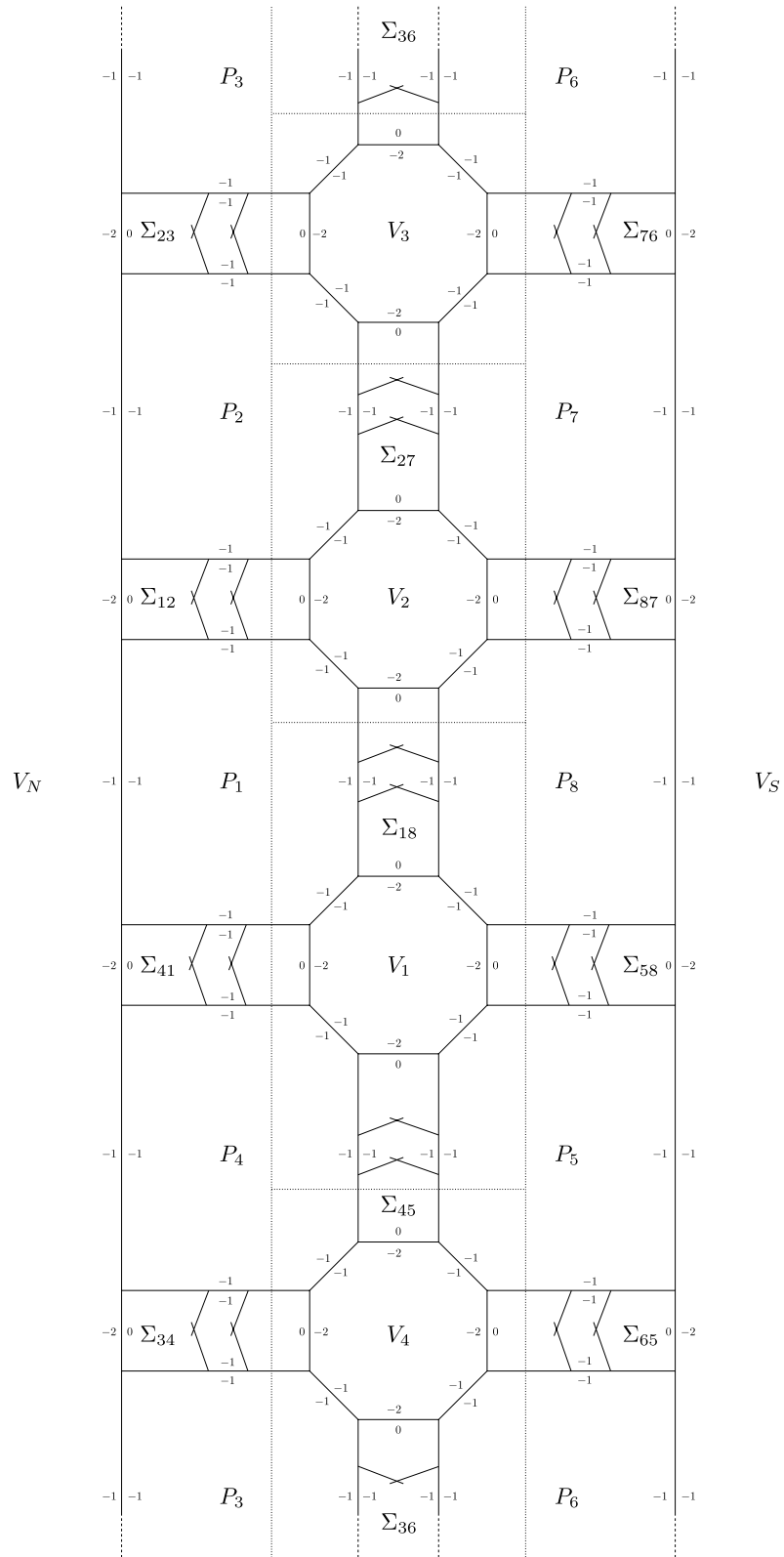


Figure 5.7: Modèle pour la dégénérescence en un octaèdre
90

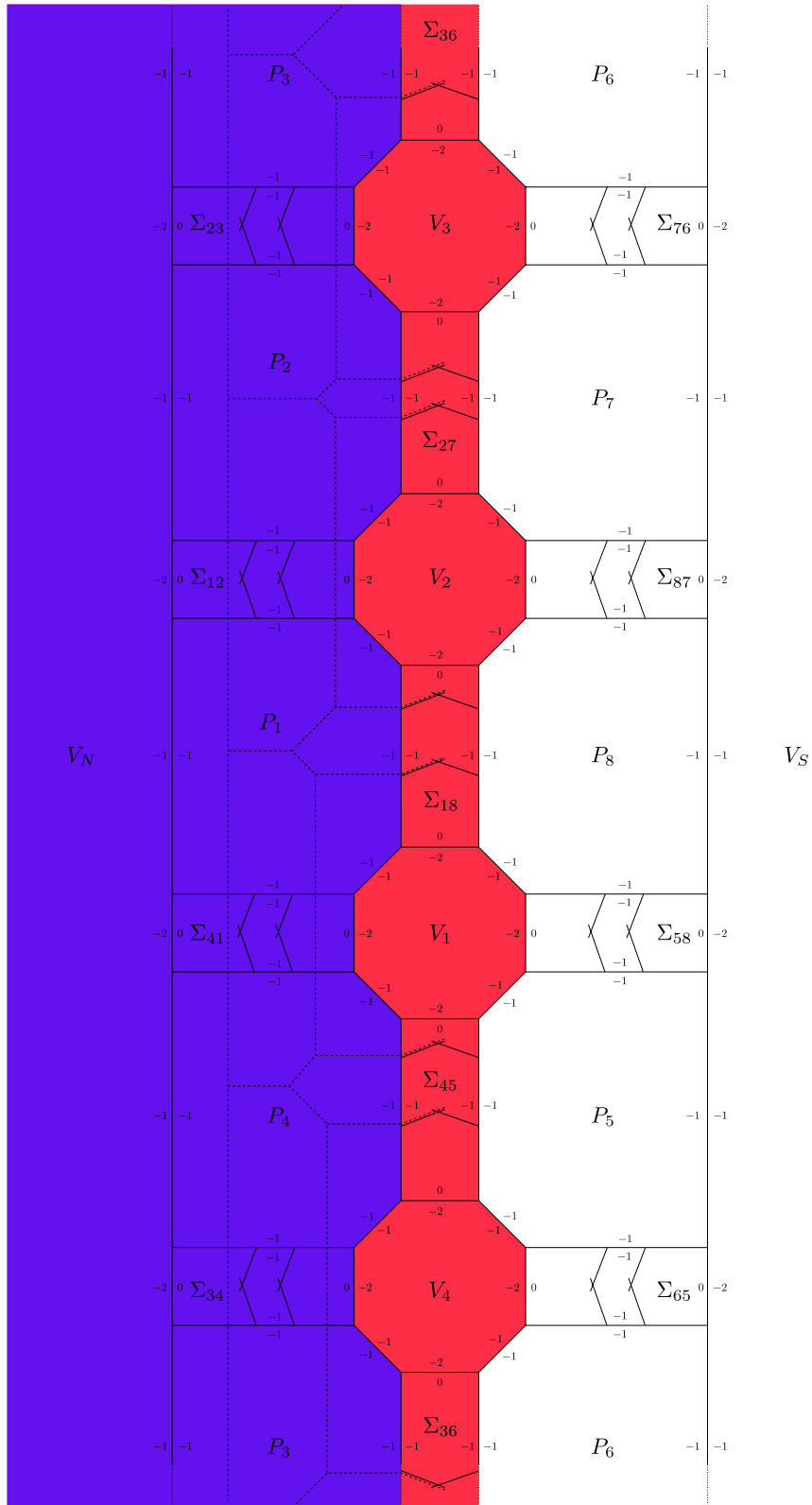


Figure 5.8: *Il cappuccio*, le capuchon : twist par l'hyperplan engendré par 4 faces contiguës

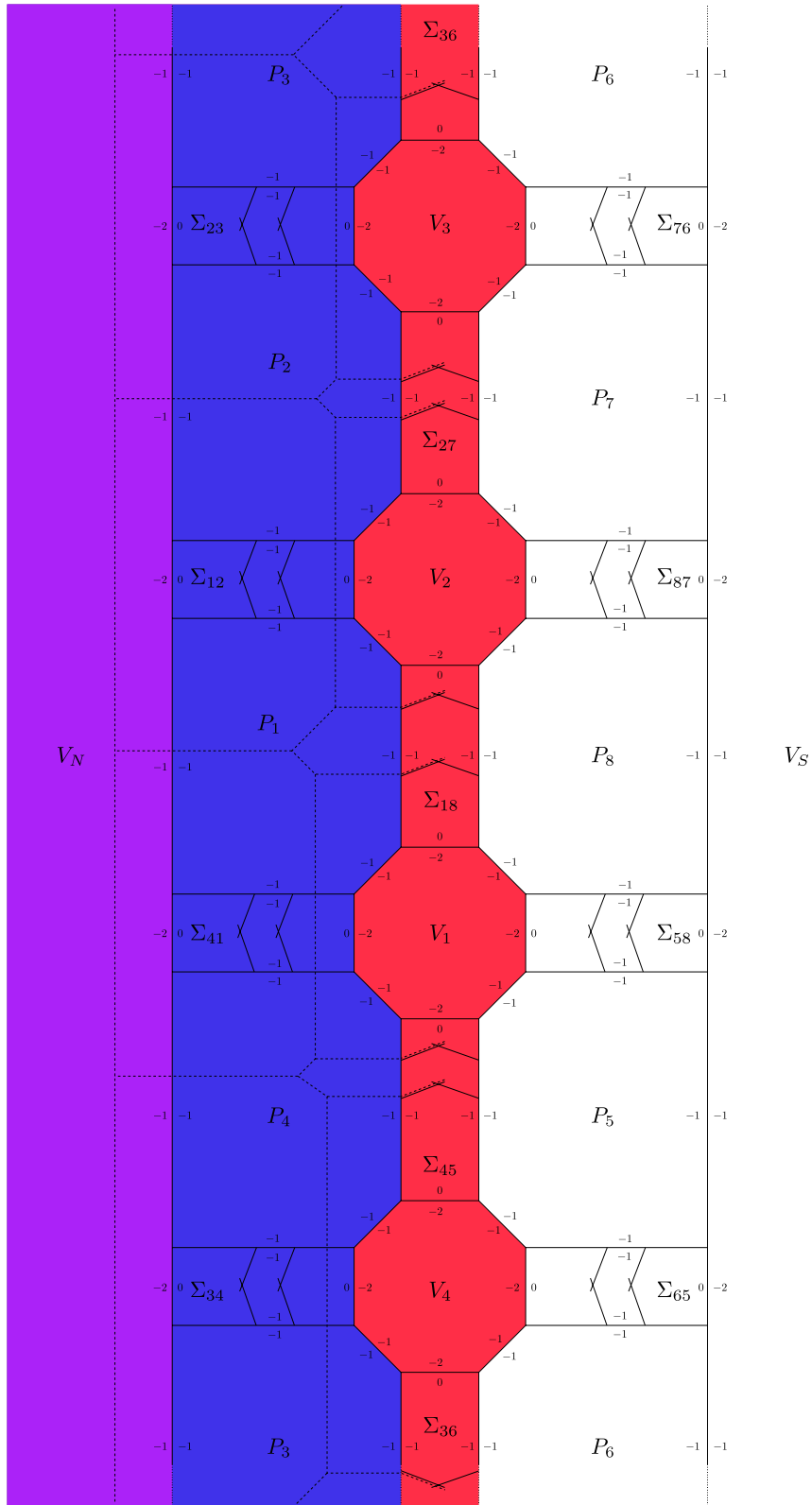


Figure 5.9: Twist successif au *cappuccio* : hyperplans par le sommet
92

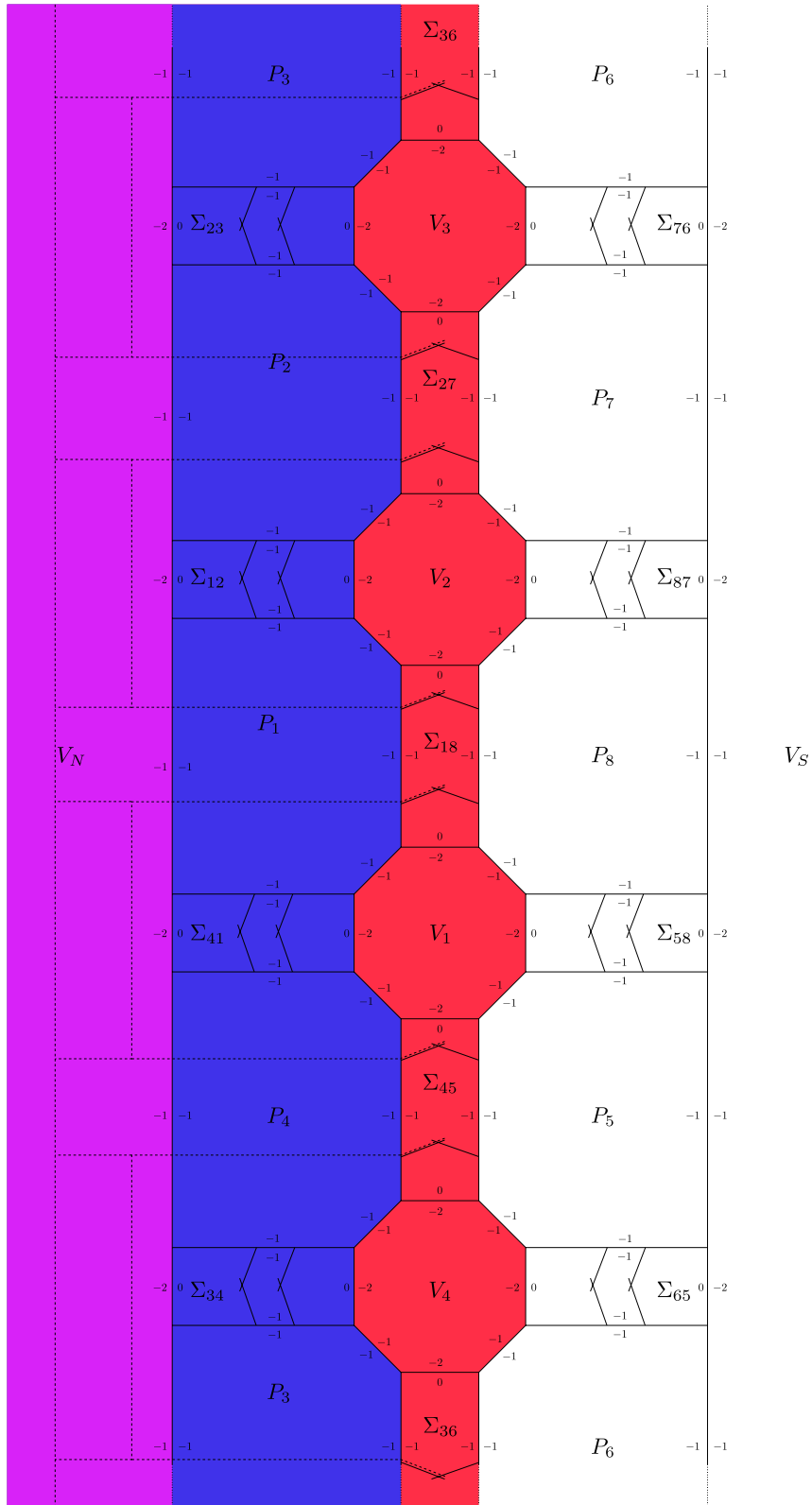


Figure 5.10: Second twist successif au *cappuccio* : hyperplan tangent au sommet 93

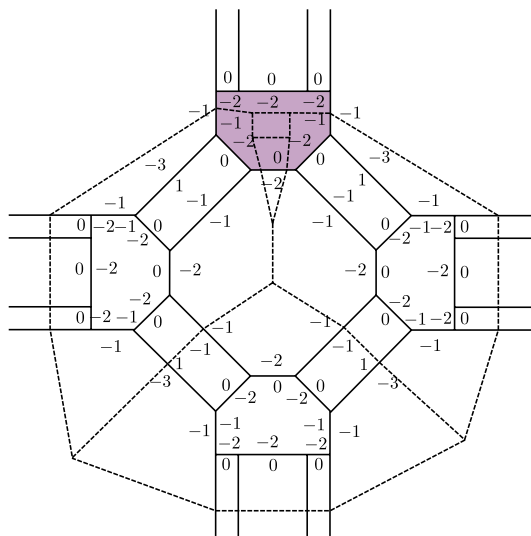


Figure 5.11: Modèle local autour de V_N obtenu par nouveau changement de base

5.5 – Formules à la Salmon dans d’autres espaces

(5.29) Problème. *Établir des formules similaires à celles de (4.3) énumérant pour une surface $S \subseteq V$ les sections de S par un “hyperplan” qui sont δ -nodales, où V est $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2$, $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, un espace projectif à poids, un solide torique, etc.*

Ce problème me semble bien adapté pour être proposé comme sujet de thèse. J’ai en tête d’établir ces formules par élimination, en utilisant des résultants et discriminants adaptés, et éventuellement des versions réduites comme décrit dans la section 4.2. Dans certains cas la théorie est disponible, voir par exemple [Jou96], dans d’autres il faudra au préalable l’établir. Les A -discriminants de [GKZ08], voir (5.30) ci-dessous, pourront aussi s’avérer utiles.

Bien sûr il doit être aussi possible d’établir ces formules par des calculs de classes de Chern, mais il me semble que cette voie n’est pas immédiate non plus. Il sera en tout cas intéressant de comparer les deux possibilités.

Un intérêt de ces formules est qu’elles seraient fort utiles pour les énumérations subalternes qu’on est conduit à faire en suivant la méthode d’énumération par dégénérescence décrite aux sections 4.1 et 5.4. En particulier, on rencontre souvent des surfaces qui sont naturellement des revêtements cycliques très particuliers de surfaces toriques simples : les surfaces de Del Pezzo correspondant aux points triples du tétraèdre et quadruple de l’octaèdre sont ainsi des revêtements triple de \mathbf{P}^2 et double de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ respectivement, ramifiés au dessus du bord torique.

(5.30) Les discriminants réduits que nous avons introduits avec Laurent Busé sont très proches de la notion de A -discriminant développée dans le monumental [GKZ08]. En effet, étant donné un ensemble A de monômes en n variables, Gelfand–Kapranov–Zelevinsky définissent un discriminant pour les polynômes f qui sont combinaisons linéaires des monômes appartenant à A , qui s’annule si et seulement si f possède un point multiple dans $(\mathbf{C}^*)^n$.

Bien que plus restrictive, notre notion de discriminant réduit présente des avantages importants, comme le fait qu’il est défini de manière universelle (“sur \mathbf{Z} ”), et peut être calculé

efficacement grâce à la formule de Zariski montrant que c'est le terme de plus bas degré du discriminant classique, voir (4.20).

Il sera certainement instructif de revenir sur la notion de A -discriminant une fois que la théorie des discriminants réduits sera complètement au point (je renvoie à la partie 4.2 pour la liste des tâches qui restent à accomplir).

Liste des travaux

Articles originaux présentés

- [13] (avec Edoardo Sernesi) *Deformations and extensions of Gorenstein weighted projective spaces*, à paraître dans un volume Springer publié à l’occasion du 70-ème anniversaire de Ciro Ciliberto.
- [12] *Extendability of canonical models of plane quintics*, appendice à “On the extendability of projective varieties : a survey” par Angelo F. Lopez, à paraître dans un volume Springer publié à l’occasion du 70-ème anniversaire de Ciro Ciliberto.
- [11] (avec Ciro Ciliberto) *K3 curves of higher index*, à paraître dans Boll. Unione Mat. Ital.
- [10] *Comment on : On the irreducibility of the Severi variety of nodal curves in a smooth surface*, by E. Ballico, Archiv der Mathematik **114** (2) (2020), 171–174.
- [9] (avec Ciro Ciliberto, Concettina Galati, et Andreas Leopold Knutsen) *Moduli of curves on Enriques surfaces*, Adv. Math. **365** (2020), 107010, 42 pp.
- [8] (avec Laurent Busé) *Generalized weight properties of resultants and discriminants, and applications to projective enumerative geometry*, prépublication, accepté pour présentation à la conférence MEGA 2019.
- [7] (avec Ciro Ciliberto, Concettina Galati, et Andreas Leopold Knutsen) *A note on Severi varieties of nodal curves on Enriques surfaces*, in Birational Geometry and Moduli Spaces, Springer INdAM Series **39** (2020), 29–36.
- [6] (avec Ciro Ciliberto) *On the irreducibility of Severi varieties on K3 surfaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **147** (2019), 4233–4244.
- [5] (avec Ciro Ciliberto et Edoardo Sernesi) *Wahl maps and extensions of canonical curves and K3 surfaces*, J. reine angew. Math. **761** (2020), 219–245.
- [4] (avec Andreas Høring) *Numerical characterisation of quadrics*, Algebraic Geometry **4** (1) (2017), 120–135.
- [3] (avec Edoardo Sernesi) *Equigeneric and equisingular families of curves on surfaces*, Publ. Mat. **61** (2017), 175–212.
- [2] ³⁷ (avec Ciro Ciliberto) *Limits of pluri-tangent planes to quartic surfaces*, Algebraic and Complex Geometry, volume **71** of Springer Proc. Math. & Stat, 2014, 123–199, volume in Honour of Klaus Hulek’s 60th Birthday.
- [1] (avec Ciro Ciliberto) *On universal Severi varieties of low genus K3 surfaces*, Math. Zeitschrift **271** (2012), 953–960

³⁷ pour les références à cet article, j’utilise la numérotation de la version prépublication, bien plus pratique que celle de la version publiée.

Articles originaux non présentés

Article en cours de correction ³⁸

- [Y.1] (avec Ciro Ciliberto, Concettina Galati, et Andreas Leopold Knutsen) *On the locus of Prym curves where the Prym-canonical map is not an embedding*, Ark. Mat. **58** (2020), 71–85.

Prépublications

- [Z.3] (avec Laurent Manivel) *On the automorphisms of Mukai varieties*, avec un appendice de Yuri Prokhorov.
- [Z.2] (avec Ciro Ciliberto) *Double covers and extensions*.
- [Z.1] (avec Ciro Ciliberto, Concettina Galati, et Andreas Leopold Knutsen) *Irreducible unirational and uniruled components of moduli spaces of polarized Enriques surfaces*.

Travaux antérieurs

- [0.3] (avec Fabio Perroni) *The fundamental group of quotients of a product of curves*, J. Group Theory **15** (2012), Issue 3, 439–453.
- [0.2] *Intrinsic pseudo-volume forms for logarithmic pairs*, Bull. Soc. Math. France **138** (2010), no 4, 543–582.
- [0.1] *Severi varieties and self rational maps of K3 surfaces*, Internat. J. Math. **20** (2009), no 12, 1455–1477.

38. voir (3.56).

Notes du séminaire à Rome Tor Vergata : *Dégénérescences et énumération de courbes sur une surface*

J'ai organisé ce groupe de travail pendant deux ans à Rome de septembre 2015 à juillet 2017, à l'occasion d'un séjour financé par une bourse Marie Skłodowska-Curie. Il était consacré aux différentes méthodes permettant d'étudier les problèmes énumératifs du type décrit en (4.1).

J'ai entrepris d'éditer un recueil des notes de ce séminaire. J'indique ci-dessous la liste des chapitres prévus. La plupart sont consacrés à exposer, compléter et illustrer des résultats récents dans cette thématique ; certains sont consacrés à des résultats originaux.

C'est un travail qui est toujours en cours, et bien entendu il n'est pas question de le présenter pour l'obtention de l'habilitation à diriger des recherches. J'ai trouvé plaisant³⁹ de me référer à ces chapitres au cours de ce mémoire ; c'est au moins une bonne occasion d'adresser mes remerciements amicaux à tous les participants à ce groupe de travail : *un caro saluto a tutti i partecipanti del seminario, anche coloro che non compaiono nella lista sotto ; grazie di tutto.*

- [TV.1] Limits of nodal curves : generalities and examples, *Ciro Ciliberto*
- [TV.2] Deformations of curves on surfaces, *Edoardo Sernesi*
- [TV.3] Geometry of logarithmic Severi varieties at a general point, *Thomas Dedieu*
- [TV.4] Counting plane curves of any genus : description of limit curves, *Concettina Galati*
- [TV.5] Degenerations of nodal curves in a normal crossings degeneration of surfaces and applications, *Concettina Galati*
- [TV.6] Deformations of an m -tacnode into $m - 1$ nodes, *Margherita Lelli-Chiesa*
- [TV.7] Products of deformation spaces of tacnodes, *Francesco Bastianelli*
- [TV.8] Enumeration of curves by floor diagrams using degenerations of the projective plane, *Thomas Dedieu*
- [TV.9] Enumeration of plane curves, examples!, *Thomas Dedieu*
- [TV.10] Jun Li's degeneration formula and beyond, *Thomas Dedieu*
- [TV.11] Enumerative geometry of $K3$ surfaces, *Thomas Dedieu*
- [TV.12] Enumeration of curves in toric surfaces, tropical geometry, and floor diagrams, *Thomas Dedieu*
- [TV.13] Göttsche Conjecture and Göttsche-Yau-Zaslow Formula, *Francesco Bastianelli, Thomas Dedieu*
- [TV.14] Some classical formulae for curves and surfaces, *Thomas Dedieu*
- [TV.15] Node polynomials for curves on surfaces, *Thomas Dedieu*
- [TV.16] Flag semi-stable reduction of tacnodal curves in degenerate surfaces, *Ciro Ciliberto, Thomas Dedieu, Concettina Galati*
- [TV.17] ⁴⁰ Applications of the theory of resultants to enumerative projective geometry, *Laurent Busé, Thomas Dedieu*

39. auto-complaisant ?

40. travail présenté, numéroté [8] dans la liste des travaux présentés.

Bibliographie

- [ABS17] Enrico Arbarello, Andrea Bruno, and Edoardo Sernesi. On hyperplane sections of $K3$ surfaces. *Algebr. Geom.*, 4(5):562–596, 2017.
- [AC80] Enrico Arbarello and Maurizio Cornalba. Su una proprietà notevole dei morfismi di una curva a moduli generali in uno spazio proiettivo. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, 38(2):87–99 (1981), 1980.
- [AC81a] Enrico Arbarello and Maurizio Cornalba. Footnotes to a paper of Beniamino Segre. *Math. Ann.*, 256(3):341–362, 1981.
- [AC81b] Enrico Arbarello and Maurizio Cornalba. Su una congettura di Petri. *Comment. Math. Helv.*, 56(1):1–38, 1981.
- [ACG11] Enrico Arbarello, Maurizio Cornalba, and Phillip A. Griffiths. *Geometry of algebraic curves. Volume II*, volume 268 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer, Heidelberg, 2011. With a contribution by Joseph Daniel Harris.
- [ACGS20] Dan Abramovich, Qile Chen, Mark Gross, and Bernd Siebert. Decomposition of degenerate Gromov-Witten invariants. *Compos. Math.*, 156(10):2020–2075, 2020.
- [Ane21] Martina Anelli. *Surfaces with Prym-canonical hyperplane sections*. PhD thesis, Università degli Studi della Calabria, 2021.
- [Ara06] Carolina Araujo. Rational curves of minimal degree and characterizations of projective spaces. *Math. Ann.*, 335(4):937–951, 2006.
- [AS79] Enrico Arbarello and Edoardo Sernesi. The equation of a plane curve. *Duke Math. J.*, 46(2):469–485, 1979.
- [Băd94] Lucian Bădescu. On a result of Zak-L’vovsky. In *Projective geometry with applications*, volume 166 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 57–73. Dekker, New York, 1994.
- [Bal] Edoardo Ballico. Extending infinitely many times arithmetically cohen-macaulay and gorenstein subvarieties of projective spaces. arXiv:2102.06457.
- [Bal19] Edoardo Ballico. On the irreducibility of the Severi variety of nodal curves in a smooth surface. *Arch. Math. (Basel)*, 113(5):483–487, 2019.
- [Bay94] Lionel Bayle. Classification des variétés complexes projectives de dimension trois dont une section hyperplane générale est une surface d’Enriques. *J. Reine Angew. Math.*, 449:9–63, 1994.
- [Bea78] Arnaud Beauville. *Surfaces algébriques complexes*. Astérisque, No. 54. Société Mathématique de France, Paris, 1978.
- [Bea90] Arnaud Beauville. Sur les hypersurfaces dont les sections hyperplanes sont à module constant. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. I*, volume 86 of *Progr. Math.*, pages 121–133. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990. With an appendix by David Eisenbud and Craig Huneke.
- [Bea99] Arnaud Beauville. Counting rational curves on $K3$ surfaces. *Duke Math. J.*, 97(1):99–108, 1999.
- [Bea04] Arnaud Beauville. Fano threefolds and $K3$ surfaces. In *The Fano Conference*, pages 175–184. Univ. Torino, Turin, 2004.
- [BFT10] E. Ballico, C. Fontanari, and L. Tasin. Singular curves on $K3$ surfaces. *Sarajevo J. Math.*, 6(19)(2):165–168, 2010.

- [BJ14] Laurent Busé and Jean-Pierre Jouanolou. On the discriminant scheme of homogeneous polynomials. *Math. Comput. Sci.*, 8(2):175–234, 2014.
- [BL00] Jim Bryan and Naichung Conan Leung. The enumerative geometry of $K3$ surfaces and modular forms. *J. Amer. Math. Soc.*, 13(2):371–410 (electronic), 2000.
- [BM87] A. Beauville and J.-Y. Mérindol. Sections hyperplanes des surfaces $K3$. *Duke Math. J.*, 55(4):873–878, 1987.
- [CaDr15] Cinzia Casagrande and Stéphane Druel. Locally unsplit families of rational curves of large anticanonical degree on Fano manifolds. *IMRN*, doi:10.1093/imrn/rnv011, 2015.
- [CC02] L. Chiantini and C. Ciliberto. Weakly defective varieties. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 354(1):151–178, 2002.
- [CCFM07] A. Calabri, C. Ciliberto, F. Flamini, and R. Miranda. On the K^2 of degenerations of surfaces and the multiple point formula. *Ann. of Math. (2)*, 165(2):335–395, 2007. with a corrigendum in volume 186 (2017).
- [CFGK17] Ciro Ciliberto, Flaminio Flamini, Concettina Galati, and Andreas Leopold Knutsen. Moduli of nodal curves on $K3$ surfaces. *Adv. Math.*, 309:624–654, 2017.
- [CGL] Xi Chen, Frank Gounelas, and Christian Liedtke. Curves on $K3$ surfaces. Prépublication arXiv:1907.01207, à paraître dans Duke Math. J.
- [CH98a] Lucia Caporaso and Joe Harris. Counting plane curves of any genus. *Invent. Math.*, 131(2):345–392, 1998.
- [CH98b] Lucia Caporaso and Joe Harris. Parameter spaces for curves on surfaces and enumeration of rational curves. *Compositio Math.*, 113(2):155–208, 1998.
- [Ch196] I. A. Cheltsov. Singularity of three-dimensional manifolds possessing an ample effective divisor—a smooth surface of Kodaira dimension zero. *Mat. Zametki*, 59(4):618–626, 640, 1996.
- [CHMN18] D. Cook, II, B. Harbourne, J. Migliore, and U. Nagel. Line arrangements and configurations of points with an unexpected geometric property. *Compos. Math.*, 154(10):2150–2194, 2018.
- [Chx] Xi Chen. Self rational maps of $K3$ surfaces. Prépublication arXiv:1008.1619.
- [Chx99] Xi Chen. Rational curves on $K3$ surfaces. *J. Algebraic Geom.*, 8(2):245–278, 1999.
- [Chx02] Xi Chen. A simple proof that rational curves on $K3$ are nodal. *Math. Ann.*, 324(1):71–104, 2002.
- [Chx19] Xi Chen. Nodal curves on $K3$ surfaces. *New York J. Math.*, 25:168–173, 2019.
- [Chy] Yiran Cheng. Hyperplane sections of hypersurfaces. Prépublication arXiv:2001.10983.
- [CK14] Ciro Ciliberto and Andreas Leopold Knutsen. On k -gonal loci in Severi varieties on general $K3$ surfaces and rational curves on hyperkähler manifolds. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 101(4):473–494, 2014. with a corrigendum, *J. Math. Pures Appl.* **107** (2017) no. 5, 665–666.
- [CLM93] Ciro Ciliberto, Angelo Lopez, and Rick Miranda. Projective degenerations of $K3$ surfaces, Gaussian maps, and Fano threefolds. *Invent. Math.*, 114(3):641–667, 1993.
- [CLM98] Ciro Ciliberto, Angelo Felice Lopez, and Rick Miranda. Classification of varieties with canonical curve section via Gaussian maps on canonical curves. *Amer. J. Math.*, 120(1):1–21, 1998.

- [CM86] A. Conte and J. P. Murre. On the definition and on the nature of the singularities of Fano threefolds. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, (Special Issue):51–67 (1987), 1986. Conference on algebraic varieties of small dimension (Turin, 1985).
- [CM90] Ciro Ciliberto and Rick Miranda. On the Gaussian map for canonical curves of low genus. *Duke Math. J.*, 61(2):417–443, 1990.
- [CMSB02] Koji Cho, Yoichi Miyaoka, and Nicholas I. Shepherd-Barron. Characterizations of projective space and applications to complex symplectic manifolds. In *Higher dimensional birational geometry (Kyoto, 1997)*, volume 35 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 1–88. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002.
- [CMT01] C. Ciliberto, R. Miranda, and M. Teicher. Pillow degenerations of $K3$ surfaces. In *Applications of algebraic geometry to coding theory, physics and computation (Eilat, 2001)*, volume 36 of *NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.*, pages 53–63. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001.
- [Coa12] Iustin Coandă. A simple proof of Tyurin’s Babylonian tower theorem. *Comm. Algebra*, 40(12):4668–4672, 2012.
- [CoDo89] François R. Cossec and Igor V. Dolgachev. *Enriques surfaces. I*, volume 76 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1989.
- [CU93] Fernando Cukierman and Douglas Ulmer. Curves of genus ten on $K3$ surfaces. *Compositio Math.*, 89(1):81–90, 1993.
- [DBFT] Lorenzo De Biase, Enrico Fatighenti, and Fabio Tanturri. Fano 3-folds from homogeneous vector bundles over grassmannians. Prépublication arXiv:2009.13382.
- [Deb] Olivier Debarre. Rational curves on hypersurfaces. Notes of the course held in Cabo Frio and other places, <https://webusers.imj-prg.fr/uploads/olivier.debarre/Busan2016.pdf>.
- [Deb01] Olivier Debarre. *Higher-dimensional algebraic geometry*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [Dim87] Alexandru Dimca. *Topics on real and complex singularities*. Advanced Lectures in Mathematics. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1987. An introduction.
- [Eis05] David Eisenbud. *The geometry of syzygies*, volume 229 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2005. A second course in commutative algebra and algebraic geometry.
- [Epe84] D. H. J. Epema. *Surfaces with canonical hyperplane sections*, volume 1 of *CWI Tract*. Stichting Mathematisch Centrum, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, 1984.
- [Far12] Gavril Farkas. Theta characteristics and their moduli. *Milan J. Math.*, 80(1):1–24, 2012.
- [FKPS08] Flaminio Flamini, Andreas Leopold Knutsen, Gianluca Pacienza, and Edoardo Sernesi. Nodal curves with general moduli on $K3$ surfaces. *Comm. Algebra*, 36(11):3955–3971, 2008.
- [FP05] Gavril Farkas and Mihnea Popa. Effective divisors on $\overline{\mathcal{M}}_g$, curves on $K3$ surfaces, and the slope conjecture. *J. Algebraic Geom.*, 14(2):241–267, 2005.
- [Gal09] Concettina Galati. Degenerating curves and surfaces: first results. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, 58(2):211–243, 2009.
- [GH16] V. Gritsenko and K. Hulek. Moduli of polarized Enriques surfaces. In *$K3$ surfaces and their moduli*, volume 315 of *Progr. Math.*, pages 55–72. Birkhäuser/Springer, [Cham], 2016.

- [GK14] Concettina Galati and Andreas Leopold Knutsen. On the existence of curves with A_k -singularities on $K3$ surfaces. *Math. Res. Lett.*, 21(5):1069–1109, 2014.
- [GKZ08] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, and A. V. Zelevinsky. *Discriminants, resultants and multidimensional determinants*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2008. Reprint of the 1994 edition.
- [GL87] Mark Green and Robert Lazarsfeld. Special divisors on curves on a $K3$ surface. *Invent. Math.*, 89(2):357–370, 1987.
- [GR15] Rodrigo Gondim and Francesco Russo. On cubic hypersurfaces with vanishing hessian. *J. Pure Appl. Algebra*, 219(4):779–806, 2015.
- [Gre84] Mark Green. Koszul cohomology and the geometry of projective varieties. *J. Differential Geom.*, 19(1):125–171, 1984.
- [GRS20] Rodrigo Gondim, Francesco Russo, and Giovanni Staglianò. Hypersurfaces with vanishing hessian via dual Cayley trick. *J. Pure Appl. Algebra*, 224(3):1215–1240, 2020.
- [GT18] Arturo Giles Flores and Bernard Teissier. Local polar varieties in the geometric study of singularities. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 27(4):679–775, 2018.
- [GV] Alice Garbagnati and Alessandro Verra. Views on level ℓ curves, $K3$ surfaces and Fano threefolds. Prépublication arXiv:2108.12215.
- [HMNT21] B. Harbourne, J. Migliore, U. Nagel, and Z. Teitler. Unexpected hypersurfaces and where to find them. *Michigan Math. J.*, 70(2):301–339, 2021.
- [HN13] Andreas Höring and Carla Novelli. Mori contractions of maximal length. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 49(1):215–228, 2013.
- [HrM98] Joe Harris and Ian Morrison. *Moduli of curves*, volume 187 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [Hrs79] Joe Harris. Galois groups of enumerative problems. *Duke Math. J.*, 46(4):685–724, 1979.
- [Hrs86] Joe Harris. On the Severi problem. *Invent. Math.*, 84(3):445–461, 1986.
- [Hrs95] Joe Harris. *Algebraic geometry*, volume 133 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. A first course.
- [Hrt86] Robin Hartshorne. Generalized divisors on Gorenstein curves and a theorem of Noether. *J. Math. Kyoto Univ.*, 26:375–386, 1986.
- [Huy16] Daniel Huybrechts. *Lectures on $K3$ surfaces*, volume 158 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.
- [Hwa07] Jun-Muk Hwang. Deformation of holomorphic maps onto Fano manifolds of second and fourth Betti numbers 1. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 57(3):815–823, 2007.
- [Hwa13] Jun-Muk Hwang. Varieties of minimal rational tangents of codimension 1. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 46(4):629–649 (2013), 2013.
- [HwM04] Jun-Muk Hwang and Ngaiming Mok. Birationality of the tangent map for minimal rational curves. *Asian J. Math.*, 8(1):51–63, 2004.
- [Ion86] Paltin Ionescu. Generalized adjunction and applications. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 99(3):457–472, 1986.
- [IP99] V. A. Iskovskikh and Yu. G. Prokhorov. *Algebraic geometry. V*, volume 47 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 1999. Fano varieties.
- [Ish91] Shihoko Ishii. Quasi-Gorenstein Fano 3-folds with isolated nonrational loci. *Compositio Math.*, 77(3):335–341, 1991.

- [Jou96] Jean-Pierre Jouanolou. Résultant anisotrope, compléments et applications. volume 3, pages Research Paper 2, approx. 91. 1996. The Foata Festschrift.
- [Keb02a] Stefan Kebekus. Characterizing the projective space after Cho, Miyaoka and Shepherd-Barron. In *Complex geometry (Göttingen, 2000)*, pages 147–155. Springer, Berlin, 2002.
- [Keb02b] Stefan Kebekus. Families of singular rational curves. *J. Algebraic Geom.*, 11(2):245–256, 2002.
- [Kei03] Thomas Keilen. Irreducibility of equisingular families of curves. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355(9):3485–3512, 2003.
- [Kem15] Michael Kemeny. The moduli of singular curves on K3 surfaces. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 104(5):882–920, 2015.
- [KLM19] Andreas Leopold Knutsen, Margherita Lelli-Chiesa, and Giovanni Mongardi. Severi varieties and Brill-Noether theory of curves on abelian surfaces. *J. Reine Angew. Math.*, 749:161–200, 2019.
- [KL] Andreas Leopold Knutsen, Margherita Lelli-Chiesa. Genus two curves on Abelian surfaces. Prépublication arXiv:1901.07603.
- [KMPS10] A. Klemm, D. Maulik, R. Pandharipande, and E. Scheidegger. Noether-Lefschetz theory and the Yau-Zaslow conjecture. *J. Am. Math. Soc.*, 23(4):1013–1040, 2010.
- [Knu01] Andreas Leopold Knutsen. On k th-order embeddings of K3 surfaces and Enriques surfaces. *Manuscripta Math.*, 104(2):211–237, 2001.
- [Knu20] Andreas Leopold Knutsen. On moduli spaces of polarized Enriques surfaces. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 144:106–136, 2020.
- [KO73] Shoshichi Kobayashi and Takushiro Ochiai. Characterizations of complex projective spaces and hyperquadrics. *J. Math. Kyoto Univ.*, 13:31–47, 1973.
- [Kol96] János Kollár. *Rational curves on algebraic varieties*, volume 32 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [Kon94] Shigeyuki Kondō. The rationality of the moduli space of enriques surfaces. *Compositio Math.*, 91:159–173, 1994.
- [KST11] Martijn Kool, Vivek Shende, and Richard P. Thomas. A short proof of the Göttsche conjecture. *Geom. Topol.*, 15(1):397–406, 2011.
- [Li02] Jun Li. A degeneration formula of GW-invariants. *J. Differential Geom.*, 60(2):199–293, 2002.
- [LM03] Joseph M. Landsberg and Laurent Manivel. On the projective geometry of rational homogeneous varieties. *Comment. Math. Helv.*, 78:65–100, 2003.
- [LS02] H. Lange and E. Sernesi. Severi varieties and branch curves of abelian surfaces of type $(1, 3)$. *Internat. J. Math.*, 13(3):227–244, 2002.
- [Lvo92] Serge Lвовski. Extensions of projective varieties and deformations. I, II. *Michigan Math. J.*, 39(1):41–51, 65–70, 1992.
- [Mar] Vincenzo Martello. Simple isotropic decompositions of the curve sections of the known Enriques-Fano threefolds. Prépublication arXiv:2107.04052.
- [McK93] James McKernan. Varieties with isomorphic or birational hyperplane sections. *Internat. J. Math.*, 4(1):113–125, 1993.
- [Min99] Tatsuhiro Minagawa. Deformations of \mathbf{Q} -Calabi-Yau 3-folds and \mathbf{Q} -Fano 3-folds of Fano index 1. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 6(2):397–414, 1999.

- [Miy04] Yoichi Miyaoka. Numerical characterisations of hyperquadrics. In *Complex analysis in several variables—Memorial Conference of Kiyoshi Oka’s Centennial Birthday*, volume 42 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 209–235. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2004.
- [Mok08] Ngaiming Mok. Recognizing certain rational homogeneous manifolds of Picard number 1 from their varieties of minimal rational tangents. In *Third International Congress of Chinese Mathematicians. Part 1, 2*, volume 2 of *AMS/IP Stud. Adv. Math.*, 42, pt. 1, pages 41–61. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [Muk88] Shigeru Mukai. Curves, $K3$ surfaces and Fano 3-folds of genus ≤ 10 . In *Algebraic geometry and commutative algebra, Vol. I*, pages 357–377. Kinokuniya, Tokyo, 1988.
- [Muk92a] Shigeru Mukai. Curves and symmetric spaces. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 68(1):7–10, 1992.
- [Muk92b] Shigeru Mukai. Fano 3-folds. In *Complex projective geometry (Trieste, 1989/Bergen, 1989)*, volume 179 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 255–263. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.
- [Oul88] El Khalil Ould Mohamdi. *Élimination réduite*. PhD thesis, Université de Strasbourg, 1988.
- [Pal85] *Géométrie des surfaces $K3$: modules et périodes*. Société Mathématique de France, Paris, 1985. Séminaire Palaiseau, October 1981–January 1982, Astérisque No. 126 (1985) (1985).
- [Per] Daniel Perrin. Géométrie projective plane et applications aux géométries euclidienne et non euclidiennes. https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/Livre_de_geometrie_projective.html.
- [Prd94] Rita Pardini. Some remarks on varieties with projectively isomorphic hyperplane sections. *Geom. Dedicata*, 52(1):15–32, 1994.
- [Prk12] Brett Parker. Exploded manifolds. *Adv. Math.*, 229(6):3256–3319, 2012.
- [Pro05] Yu. G. Prokhorov. The degree of Fano threefolds with canonical Gorenstein singularities. *Mat. Sb.*, 196(1):81–122, 2005.
- [Pro07] Yu. G. Prokhorov. On Fano-Enriques varieties. *Mat. Sb.*, 198(4):117–134, 2007.
- [Ran86] Ziv Ran. On nodal plane curves. *Invent. Math.*, 86(3):529–534, 1986.
- [Ran89a] Ziv Ran. Enumerative geometry of singular plane curves. *Invent. Math.*, 97(3):447–465, 1989.
- [Ran89b] Ziv Ran. Families of plane curves and their limits: Enriques’ conjecture and beyond. *Ann. of Math. (2)*, 130(1):121–157, 1989.
- [Sa862] George Salmon. *A Treatise on the Analytic Geometry of Three Dimensions, Vol. II*. Chelsea Publishing Company, New York, 1965. reprint of the fifth (latest) edition.
- [Sam86] Pierre Samuel. *Géométrie projective*. Presses Universitaires de France, 1986.
- [San95] Takeshi Sano. On classifications of non-Gorenstein \mathbf{Q} -Fano 3-folds of Fano index 1. *J. Math. Soc. Japan*, 47(2):369–380, 1995.
- [Sch91] Frank-Olaf Schreyer. A standard basis approach to syzygies of canonical curves. *J. Reine Angew. Math.*, 421:83–123, 1991.
- [Ser06] Edoardo Sernesi. *Deformations of algebraic schemes*, volume 334 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [Sev21] Francesco Severi. *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, page Anhang F. Teubner, Leipzig-Berlin, 1921. translation by E. Löffler.

- [Tan82] Allen Tannenbaum. Families of curves with nodes on $K3$ surfaces. *Math. Ann.*, 260(2):239–253, 1982.
- [TiB87] Montserrat Teixidor i Bigas. Half-canonical series on algebraic curves. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 302(1):99–115, 1987.
- [Vak00] Ravi Vakil. Counting curves on rational surfaces. *Manuscripta Math.*, 102(1):53–84, 2000.
- [Voi88] Claire Voisin. Courbes tétraogonales et cohomologie de Koszul. *J. Reine Angew. Math.*, 387:111–121, 1988.
- [Voi92] Claire Voisin. Sur l’application de Wahl des courbes satisfaisant la condition de Brill-Noether-Petri. *Acta Math.*, 168(3-4):249–272, 1992.
- [Wah74] Jonathan M. Wahl. Equisingular deformations of plane algebroid curves. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 193:143–170, 1974.
- [Wah87] Jonathan Wahl. The Jacobian algebra of a graded Gorenstein singularity. *Duke Math. J.*, 55(4):843–871, 1987.
- [Wah97] Jonathan Wahl. On cohomology of the square of an ideal sheaf. *J. Algebraic Geom.*, 6(3):481–511, 1997.
- [Wiś91] Jarosław A. Wiśniewski. On contractions of extremal rays of Fano manifolds. *J. Reine Angew. Math.*, 417:141–157, 1991.
- [Zah] Adrian Zahariuc. The Severi problem for abelian surfaces in the primitive case. Prépublication arXiv:1811.01281.
- [Zah19] Adrian Zahariuc. The irreducibility of the generalized Severi varieties. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 119(6):1431–1463, 2019.
- [Zak91] F. L. Zak. Some properties of dual varieties and their applications in projective geometry. In *Algebraic geometry (Chicago, IL, 1989)*, volume 1479 of *Lecture Notes in Math.*, pages 273–280. Springer, Berlin, 1991.
- [Zar37] Oscar Zariski. Generalized weight properties of the resultant of $n + 1$ polynomials in n indeterminates. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 41(2):249–265, 1937.
- [Zar82] Oscar Zariski. Dimension-theoretic characterization of maximal irreducible algebraic systems of plane nodal curves of a given order n and with a given number d of nodes. *Amer. J. Math.*, 104(1):209–226, 1982.
- [Zha] Sailun Zhan. Monodromy of rational curves on $k3$ surfaces of low genus. Prépublication arXiv:2004.08719.